

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Зудина Марина Николаевна

Кинетическая теория вихревых движений  
в нестационарных облаках газов и дисперсных частиц

Специальность 01.04.02 –  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата  
физико–математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико–математических  
наук, доцент  
АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ ГОЛОВ

МОСКВА –2017

## Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Вихревые движения непрерывных сред и история их теоретического ис- следования.....	10
1.1. Вихревые движения в природе.....	10
1.2. Вихревые движения в технике. Примеры применения вихревых движений в технике.....	12
1.3. Вихревые преобразователи энергии.....	14
1.4. Краткая история теории вихревого движения.....	16
1.5. Общее представление о вихревом движении сплошной среды. Некоторые свойства и характеристики вихревого движения.....	22
1.6 О теории вихревых движений в газах и газообразных средах.....	26
Глава 2. Кинетическое описание эволюции вихря плотности потока массы в рас- ширяющемся газообразном облаке.....	34
2.1. Статистико-механические основания и кинетическое описание Моделей.....	36
2.2. Вихри плотности потока массы в облаке частиц, неограниченно расширяю- щемся из малого источника в однородном внешнем поле.....	38
2.3. Поток вещества в неограниченно расширяющемся облаке, созданном диспер- гированием широкой пластины в однородном поле.....	50
2.4. Вихревые движения в свободно расширяющемся газообразном облаке, со- зданном инерциально движущимся малым источником.....	51
2.5. Вихревые движения в расширяющемся газообразном облаке, созданном ма- лым источником, инерциально движущимся коллинеарно однородному полю..	57
2.6. Вихревые движения в расширяющемся газообразном облаке, созданном ма- лым источником, движущемся ортогонально однородному полю.....	62
2.7. Учёт начального состояния в задаче об эволюции вихревых образований в нестационарных газообразных системах.....	71

Глава 3. Распределение момента импульса и момента силы в нестационарных газообразных средах.....	79
3.1. Распределение момента силы в нестационарном газообразном облаке, находящемся в поле потенциальных сил.....	79
3.2. Распределение момента импульса в нестационарном газообразном облаке, находящемся в поле потенциальных сил.....	85
3.3. Взаимосвязь плотности момента силы, плотности момента импульса и создаваемого ими вихря.....	89
Заключение.....	92
Список литератур.....	96

## Введение

Вихри, вообще, и газовые, в частности, являются одним из самых загадочных и малоизученных явлений природы, хотя с вихревыми процессами связано много физических явлений, литература по этой проблеме весьма обширна [1, 2, 3, 4, 5, 6 и др.], и исследования в этой области продолжаются. Причиной малой изученности является сложность искусственного создания и управления свободными вихревыми объектами. В лабораторных условиях проще всего создавать устойчивые линейные вихри, которые ограничены механическими конструкциями. Создать пару свободных линейных вихрей и контролировать процесс их взаимодействия - уже весьма сложная задача.

Вихри могут образовываться в любой среде с движущимися частицами: в жидкости, газе, в плазме (шаровые молнии). Потоки вихрей в вихревых системах могут быть вложенным или разнесённым, вращающимися в одну или разные стороны, могут взаимодействовать друг с другом, притягиваясь или отталкиваясь, а могут и усиливать, ослаблять или создавать вокруг себя электрические или магнитные поля.

Вихри и их системы могут самостабилизироваться, сохраняясь, определённое время, а могут быть склонны к быстрому саморазрушению.

Многие задачи вихревого движения (что не тождественно понятию концентрированного физического вихря [1]) ещё ждут решения. К ним относятся задачи о проблеме образования, структуре и энергетике газовых вихрей. Также в незавершённом состоянии находится теория пограничного слоя, хотя в этой области сделано немало. Незначительно число научных трудов в области взаимодействия винтовых газовых потоков. Пока не рассмотрены задачи, которые связаны с взаимопроникновением вихревых потоков в разнообразных газах, о взаимодействии сверхплотных винтовых газовых структур по типу винтовых вихревых торoidalных колец или взаимодействия сложных винтовых вихревых структур, которые состоят из множества вихрей.

Далее, не рассматривая квантовые или плазменные вихри, ограничимся рассмотрением вихревого движения идеальных газов переменной плотности.

**Актуальность** теоретического исследования вихревого движения газов обусловлена трудностями его моделирования в лабораторных условиях и недостаточной разработанностью его молекулярно-кинетической теории.

**Практическое значение** исследования определяется широким распространением рассматриваемых процессов в атмосферных явлениях и в космическом пространстве, а также их широким использованием в технике.

**Целью данного исследования** является теоретическое описание эволюции вихревых движений в нестационарных облаках газа и дисперсных частиц на основе применения методов кинетической теории. Стационарные газы удовлетворительно описываются известной теорией.

Обширная литература, посвященная вихревым движениям, обычно исходит из представлений теории сплошных сред [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,]. При этом, большей частью, рассматриваются движения жидкости с постоянной плотностью. Со времён Гельмгольца большинство теоретических работ исходит из сохранения вихрей в несжимаемых средах. Микроскопическая (молекулярно-кинетическая) теория вихрей, включая вопрос об их возникновении и затухании, разработана недостаточно, особенно применительно к неравновесным газам с переменной плотностью. В настоящее время работы в этом направлении продолжаются [1, 12, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27], но, при наличии ряда результатов, они пока далеки от полного завершения. Поэтому, представляет интерес попытка кинетического описания вихревого движения для определённого класса простых моделей, пока не затрагивая вопрос о концентрированных физических вихрях.

В данном исследовании, **в отличие** от существующих теорий, исходным понятием является понятие вихря плотности потока массы, а не вихря скорости, и ограничения, вызванные условием несжимаемости среды, снимаются. Вектор плотности потока массы, вычисляемый в соответствие с его определением в кинетической теории, содержит неконвективное слагаемое, обычно теряемое в газоди-

намике. К тому же, обычно рассматриваются системы, находящихся в стационарном состоянии, чем исключается из рассмотрения возникновение, развитие и затухание вихрей, как и причины этих явлений.

В настоящем исследовании ставится **задача** описания эволюции вихревого движения, включая образование и затухание вихрей, исходя из микроскопической теории. Рассматриваемые модели позволяют учесть сжимаемость среды и рассмотреть вихревые движения в динамике и во внешних полях.

**Терминология.** Газообразными (газоподобными) называем достаточно разреженные системы частиц в вакууме. При этом, как образец для сравнения в равновесном случае, используется модель идеального газа в теории Гиббса.

Квазинепрерывной называем среду, моделируемую в терминах статистической теории облака частиц, и описываемую в физическом пространстве непрерывной плотностью и плотностью потока массы.

Эволюция системы понимается, как совокупность изменений её состояния в пространстве и времени, включая её релаксацию и сопутствующие процессы переноса.

Движение считается вихревым, если характерное поле вектора плотности потока массы имеет неравный нулю ротор.

**Научная новизна.** В данной работе будем исходить из представлений Гиббса [28], применённых к неравновесным системам, а именно из нестационарного уравнения Лиувилля – Гиббса [79, 28] для системы большого числа  $N$  частиц, движущихся в фазовом пространстве, ограничиваясь классом его квазигиббсовых решений. Квазигиббсовые называем выражения функции распределения, имеющие экспоненциальный вид, аналогично каноническому распределению Гиббса, причём показатель экспоненты может зависеть от времени. Таким образом, с самого начала рассматривается система большого числа частиц, а не отдельная частица или элемент объёма среды.

В настоящей работе физическими **моделями** сред являются идеальный газ, либо система невзаимодействующих дисперсных частиц, движущихся в вакууме, в

стационарных, однородных, потенциальных силовых полях, создаваемые быстрым диспергированием (испарением) некоторого источника.

Основное содержание диссертации изложено по следующей **схеме**:

1) уточняется модель системы многих частиц; 2) с помощью известных нестационарных функций распределения аналитически определяются выражения для плотности потока массы рассматриваемых сред; 3) находятся компоненты ротора плотности потока массы. Первые два пункта этой программы для большинства используемых моделей рассмотрены в [49, 76].

### **Положения, выносимые на защиту.**

- 1) Формулы вихря плотности потока массы в нестационарном газообразном облаке, исходящем из различных источников в однородном внешнем поле, с учётом движения источника.
- 2) Модель возникновения вихревых движений в однородном внешнем поле и при инерциальном движении источника частиц.
- 3) Явление возникновения компоненты вихря плотности потока массы, ортогональной к «боковому ветру», теоретически обнаруженнное в данном исследовании.
- 4) Механизм возникновения вихря плотности потока, обусловленный рассматриваемыми распределениями плотности момента силы и момента импульса.

**Структура и объем диссертации.** Представляемая работа состоит из: введения, трёх глав, заключения, списка литературы. Полный объем диссертации составляет 103 страниц текста. Работа содержит 65 рисунков. К работе приложен список использованной литературы (95 наименований).

Во **Введении** формулируется цель работы, указана ее актуальность, практическое значение и новизна подхода, а так же намечена структура работы.

В **первой главе** представлена краткая история вопроса, обзор литературы, дано общее представление о вихревом движении, указаны его свойства и характеристики, а также основные направления теоретических исследований в этой области. Указаны примеры связанных с ним явлений в природе и технике. Обзорная глава написана на основе источников [1, 2, 3, 4, 10, 11, 27, 32, 33, 34, 41]. Отмече-

но отсутствие работ, содержащих постановку задачи, предлагаемую в данной диссертации, или решение подобной задачи иным методом.

**Во второй главе** представлено статистико-механическое обоснование и кинетическая теория эволюции вихревых движений в нестационарных газах. Рассмотрены следующие модели: 1) модель расширяющегося облака частиц из неподвижного малого источника в однородном потенциальном поле и в отсутствие внешнего поля; 2) модель расширяющегося облака, созданного диспергированием широкой пластины (в отсутствие поля и при наличии его); 3) модель свободно расширяющегося облака, исходящего из движущегося малого источника в отсутствии поля; 4) неограниченно расширяющееся облако, исходящее из малого источника, движущегося коллинеарно внешнему полю; 6) неограниченно расширяющееся облако, исходящего из малого источника, движущегося ортогонально внешнему полю; 7) неограниченно расширяющееся облако, исходящее из сферического источника конечных размеров в однородном потенциальном поле.

**В третьей главе** рассмотрен вопрос о распределении плотности момента силы и плотности момента импульса в нестационарном газообразном облаке, находящемся в однородном потенциальном поле. Обсуждается вопрос об интегральном моменте импульса и показано его сохранение в рассматриваемых моделях. Установлена связь распределения плотности момента импульса с характеристиками вихревого движения среды.

Все результаты получены в аналитическом виде, с помощью математических компьютерных программ. Основные результаты получены строго, для принятых моделей, без привлечения численных методов или разложений в ряды с ограничением первыми членами разложений.

В гл. II и III дано графическое представление полученных результатов, включая 3-мерные графики, выполненные в программе Maple.

В **Заключении** подведен итог проделанной работы, обсуждается физический смысл полученных результатов, их новизна, научная и практическая значимость.

## Апробация работы

**Основные результаты работы докладывались на конференциях:**

1. Конференция МГОУ посвященная памяти профессора Ю. И. Яламова «Физика конденсированных сред и дисперсных систем». Москва, МГОУ, 2013.
2. Конференция МГОУ посвященная памяти профессора Ю. И. Яламова «Физика конденсированных сред и дисперсных систем». Москва, МГОУ, 2014.
3. XXVI-ая Международная научная конференция «Дисперсные системы». Одесса, Украина, ОНУ им. И. И. Мечникова, 2014.
4. Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологичных технологий». Москва, МГОУ, 2015.
5. Международная научно-практическая конференция «Передовые достижения современных наук. Новые реалии и научные решения». С-Пб., «Культ Информ Пресс», 2015.
6. Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологичных технологий». Москва, МГОУ, 2016.
7. XXVII-ая Международная научная конференция «Дисперсные системы». Одесса, Украина, ОНУ им. И. И. Мечникова, 2016.

## Глава 1. Вихревые движения непрерывных сред и история их теоретического исследования

### 1.1. Вихревые движения в природе

Одним из наиболее известных примеров вихревого движения газов в природе являются атмосферные явления – ураганы, тайфуны, смерчи и др. Ураганы являются одними из наиболее величественных явлений природы [10]. При этом исследователи нередко ограничиваются языком описания, не пытаясь понять механизма, действующего в урагане. И более того, в метеорологии даже не рассматривается, к какому типу вихрей относятся ураганы. Но в природе существуют два типа вихрей: вихри Тейлора и вихри Бенара.

В вихре Тейлора среда вращается по концентрическим окружностям в одном и том же направлении в пределах всего вихря. В вихре Бенара существует два потока: внутренний и наружный. По внутреннему потоку среда, вращаясь в одном направлении, поднимается вверх. По периферийному потоку среда, вращаясь в противоположном направлении, опускается вниз. Т.о. тайфун является вихрем Тейлора, а торнадо – вихрем Бенара.

Вихри обоих типов являются объективной реальностью. При этом менее важно, при каких условиях формируются те или иные вихри. Значительно важнее выяснить механизм их образования. Ведь зная механизм, можно найти и способы борьбы с тайфунами. Пусть тайфуны где-то и как-то формируются. В настоящее время взгляд из космоса позволяет их вовремя обнаружить и представляется реальным принять соответствующие меры по их уничтожению. А этого не сделать без знания механизма, который позволяет тайфуну быть устойчивым вихревым образованием.

Такие вихри, постоянно существующие в атмосфере, но рожденные именно в тропиках — в Атлантике и восточной части Тихого океана — и достигшие скоро-

сти ветра свыше 30 м/с, называют ураганами. Для того чтобы воздух перемещался с такой скоростью, необходима большая разность атмосферного давления на малом расстоянии.

Стоит отметить, что вихри в природе присутствуют повсеместно. С 30 годов прошлого века в метеорологии широко используются вихревые волны Россби (и вновь возникает вопрос, к какому типу вихрей они относятся). Возникают вихри и на поверхности тела в пограничном слое. При этом закон сохранения момента количества движения требует формирования парных вихрей, двигающихся в противоположные стороны.

Под воздействием солнечной радиации, рельефа и суточного вращения планеты в воздушном океане возникают неоднородности. Области пониженного давления называют циклонами, повышенного — антициклонами. Именно в циклонах зарождаются сильные ветры. Самые крупные из циклонов достигают тысяч километров в диаметре и хорошо видны из космоса благодаря наполняющим их областям. По своей сути это — вихри (рис.1.1), где воздух движется по спирали от краев к центру, в область с низким давлением.

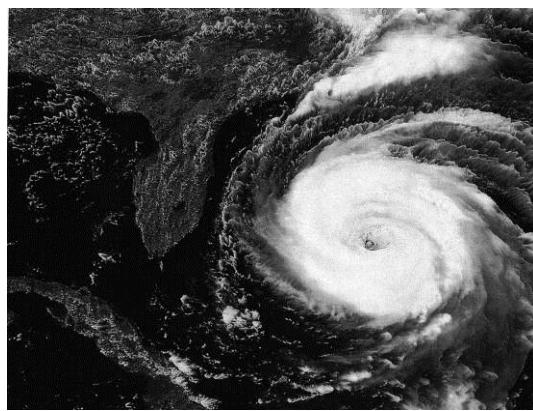


Рис. 1.1.- Образование циклона в районе Флориды (снимок из космоса).

Благодаря фото из космоса структура циклона особо видна. Атмосфера нашей планеты не бывает спокойной, ее воздушные массы находятся в постоянном движении. Наивысшей силы воздушная стихия достигает в циклонах. Штормы, ураганы — это бешено вращающиеся гигантские вихри. Чаще всего они зарождаются над прогретыми участками тропических зон океанов, но могут возникнуть и в вы-

соких широтах. Самые же скоростные вихри — торнадо — до сих пор во многом загадочны.



Рис. 1.2.- Торнадо

## **1.2. Вихревые движения в технике. Примеры применения вихревых движений в технике**

Вихревой эффект нашёл широчайшее применение в технике, в самых разных областях: от бытовых пылесосов до промышленных «вихревых камер» для химического разделения.

Широко используется Вихревой эффект Ранка-Хилша - эффект разделения газа или жидкости при закручивании в цилиндрической или конической камере на две фракции.

Так же вихревой эффект активно используется в центрифугах и сепараторах. Например это «вихревые камеры» для химического разделения веществ под действием центробежных сил и «вихревые трубы», используемые как источник холода.

Широко распространены вихревые воздуходувки – компрессоры, они применяются для множества задач, например:

- аэрация зарыбленных прудов и очистных сооружений
- вакуумный прижим на станках с ЧПУ
- пневмотранспорт и пневмопочта

- прижим листов в печатных и упаковочных машинах
- промышленные пылесосы
- вакуумные подъемные устройства
- сушка стеклянной тары.

Еще в 1960-е годы и исследование, и применение вихревых труб (далее ВТ) в серийной продукции «стартовали» у нас с более высокого научно-технологического уровня, чем уровень зарубежных промышленных ВТ. Причина была не tanto в энтузиазме конструкторов и исследователей, сколько в низких ценах на энергоресурсы, действовавших в СССР. Это способствовало повсеместному продвижению вихревых генераторов холода в промышленности и привело к появлению нескольких поколений труб разнообразных конструкций, которые далеко ушли в развитии от «классической» ВТ Ранка и конструктивно близкой к ней ВТ Фултона (США).

В 1980-е годы «продвижение» проектов пошло по-другому. С появлением систем, требовательных к микроклимату в блоках электронного управления (в программных станках, автоматических линиях, безлюдных производствах), область использования вихревых труб как «точечного» источника холода быстро расширялась. Нужно было инициировать появление конкурирующих изготовителей – поставщиков ВТ. К началу 1990-х годов пользователями вихревых труб стали заводы в 160 городах.

Условно области их применения можно объединить в десять групп:

- 1) технология машиностроения, станкостроение, промышленная электроника: создание «холодных зон» на поверхности или в объеме инструмента и/или материала; охлаждение блоков управления программных станков, автоматических линий, роботизированных участков, безлюдных производств;
- 2) горячие и вредные производства: воздушные завесы в рабочих зонах покрасочных камер, кузнечных цехов, гальванических и металлургических производств; глубокие шахты: вентиляция тупиковых забоев;

- 3) литейное производство: охлаждение песка в установках с быстротвердеющими смесями; хранение сельхозпродукции: охлаждение зерна и дисперсных продуктов во временных хранилищах;
- 4) мебельная промышленность: вдув холодного воздуха в зону фрезерования при изготовлении облицовочных плит и в зону налива лака в лаконаливных машинах;
- 5) самоходная техника для жаркого климата: охлаждение рабочих зон в кабинах кранов, в вагончиках бурильщиков и т. д.;
- 6) производство листовых материалов: раздув холодным потоком полиэтиленовой пленки, охлаждение листовой резины; производство стекла;
- 7) перевозка фруктов и овощей: малые хранилища на малых судах;
- 8) пищевые производства; транспорт; горная техника;
- 9) испытательная техника.

Так же в настоящее время в оптике фактически сформировалась новая область, называемая "оптикой винтовых полей" или "сингулярной оптикой". В рамках этой области рассматриваются свойства оптических вихрей, а также физический механизм их образования. Здесь открывается новая область когерентной оптики.

Всё это стало возможно благодаря исследованиям вихрей. И, несмотря на уже имеющуюся широкую гамму применения вихревых эффектов в технике самого разного уровня, класса и задач, остаётся ещё множество неизвестных и неизученных аспектов вихревого движения.

### **1.3. Вихревые преобразователи энергии**

Особенности закрученного течения известны и хорошо изучены. Они заключаются в наличии сдвиговых напряжений, приводящих к повышенному уровню турбулентности в закрученном потоке по сравнению с прямолинейными струйными течениями, повышенному времени пребывания частицы в потоке, большими возможностями по реализации траекторий движения. Принципиальным отли-

чием всех закрученных потоков является наличие, либо отсутствие зоны возвратного течения относительно оси потока, а также гомогенность или гетерогенность потока. Во многих случаях существенную роль в процессах тепло- и массопереноса играет теплота фазовых переходов, происходящих в вихревых потоках.

Многообразие применений закрученного потока и большое число конструктивных схем устройств, работающих с использованием вихревых потоков, (циклонон, горелок, вихревых труб, распылителей) не позволяет унифицировать методику расчёта, затрудняет поиск оптимальных решений.

Однако в работе всех видов вихревых преобразователей энергии имеется общее, характерное для всех вихревых устройств свойство заключающееся в том, что, при создании вихревых потоков газа или жидкости в них протекают интенсивные процессы тепло- и массопереноса, изменяющие физические характеристики рабочей среды и ее состояние. При этом энергетическое воздействие на рабочую среду осуществляется за счет различных способов организации и управления вихревым движением потоков.

Вихревое движение потоков газа, жидкости и двухфазных гетерогенных сред сопровождается различными физическими эффектами, среди которых можно выделить наиболее значимые: нагрев и охлаждение рабочего тела, образование двухфазных жидкостно-газовых сред, сопровождающееся кавитацией, диспергированием и распылением рабочей среды. Понимание природы процессов, происходящих в вихревых потоках газов, жидкостей и двухфазных жидкостно-газовых вихревых потоках позволит целенаправленно вести разработку вихревых преобразователей энергии и технологического оборудования с их использованием, что открывает широкие возможности для повышения качества изделий и эффективности технологических процессов.

В последнее время в различных технических объектах все чаще используются вихревые преобразователи энергии, принцип действия которых основан на преобразовании энергии при вихревом движении потоков газообразных и жидких сред. При вихревом движении происходят интенсивные процессы тепло- и массопереноса, в связи с чем вихревые устройства находят все более широкое применение в

различных отраслях народного хозяйства. Однако в технологических процессах машиностроительных производств вихревые устройства применяются ограниченно, хотя сфера их применения может быть весьма широкой. При использовании многофункциональных вихревых преобразователей энергии появляется возможность повысить эффективность таких технологических процессов, как обработка материалов резанием, мойка деталей, приготовление эмульсий смазывающе-охлаждающих жидкостей, нанесение защитных покрытий и решать ряд других технологических задач. Вихревое движение потоков газа, жидкости и двухфазных гетерогенных сред сопровождается различными физическими эффектами, среди которых наиболее значимые: нагрев и охлаждение рабочего тела, образование двухфазных жидкостно-газовых сред, сопровождающееся кавитационными явлениями или диспергированием и распылением жидкости. Данное обстоятельство объясняется свойствами используемых рабочих тел и, соответственно, различными механизмами тепло- и массопереноса в вихревых потоках.

На основе вихревого движения работают центрифуги, сепараторы. Применяют центрифуги в медицине для разделения клеточных суспензий, разнообразных проб и анализов. Важное значение имеет их применение в технике для разделения изотопов и обогащения вещества каким-либо изотопом. Сепарирование твердых веществ и жидкостей применяется для многих технологических процессов в различных отраслях промышленности. В основе работы сепараторов лежит принцип отстойника: твёрдые вещества под действием силы тяжести постепенно оседают на дне.

#### **1.4. Краткая история теории вихревого движения**

На физиков XIX века произвело большое впечатление совпадение предсказаний кинетической теории газов с экспериментальными результатами, полученными в рамках термодинамики. Два физических подхода – макроскопический

(термодинамический) и микроскопический (молекулярно-кинетический) – дополнили друг друга [32, 33, 34]. Идея о том, что вещество состоит из молекул, а те, в свою очередь, из атомов нашла убедительное подтверждение. Казалось, на основе кинетической теории, легко можно определить свойства газов, поскольку достаточно знать свойства входящих в состав молекулы атомов для определения свойств самого вещества, но в действительности всё оказалось не так просто. Благодаря этой теории удалось определить лишь некоторые свойства газов, например, вывести уравнение состояния газа, но для определения таких характеристик газов как коэффициенты теплопроводности, вязкости и диффузии нужно было серьёзно потрудиться. Для конденсированных сред получить результаты было ещё труднее, поскольку должно учитываться то, что молекулы взаимодействуют между собой не только при ударах. Поэтому, нельзя было сказать, что все физические явления микромира могут быть объяснены и рассчитаны на основе молекулярно-кинетических представлений.

Дискретное строение вещества было признано лишь в конце XIX века, а опыты, доказывающие существование молекул, проведены в 1908 году французским физиком Перреном. Обнаружение дискретной структуры строения вещества позволило определить границы применимости механики сплошных сред. Она работает только в тех случаях, когда систему можно разбить на малые объёмы, в каждом из которых содержится всё же достаточно большое количество частиц, чтобы оно подчинялось статистическим закономерностям. Тогда элементы среды находятся в состоянии термодинамического равновесия, а их свойства описываются небольшим числом макроскопических параметров. Изменения в таком малом объёме должны происходить достаточно медленно, чтобы термодинамическое равновесие сохранялось.

При выполнении этих условий, справедлива гипотеза, которая лежит в основе механики сплошной среды. Сплошной средой считается не только твёрдое тело, жидкость или газ, но и плазма (даже сильно разреженная), такая, как солнечный ветер. Число частиц в элементе объёма такой среды невелико, но благодаря большому радиусу действия сил между заряженными частицами микроскопические

параметры меняются от элемента к элементу непрерывно. Как движется в вакууме материальная точка известно со времён Ньютона. Гораздо сложнее описать движение частицы в среде.

Впервые большое значение вихрям в природе придал Р. Декарт (1596-1650), который предлагал всю научную картину движения и взаимодействия вещества объяснять, исходя из представления о вихрях. Но эта концепция не получила в своё время развития, т. к. была оттеснена механикой Ньютона. В механике движения отдельных тел и частиц места вихрям не находилось.

Положение изменилось с развитием механики сплошных сред. Большинство работ по теории вихревого движения, в том числе первые из них, рассматривают это движение в сплошной несжимаемой жидкости.

Родоначальником теории вихревого движения считается Г. Гельмгольц, который опубликовал в 1858 году свою работу «Об интеграле гидродинамических уравнений, соответствующих вихревому движению», в которой он дал формулировку теоремы сохранения вихрей. По этой теореме, при возникновении сил, которые удовлетворяют закону сохранения энергии, нельзя создать или исключить существующий вихрь, а также изменить его напряжение. Появление и исчезновение вихрей полностью определяются пассивными силами трения. Только при помощи данных сил образуется вихрь, и только они способны заставить образовавшийся вихрь затухнуть.

Интегралы гидродинамических уравнений, которые являются основой появления теоремы сохранения вихрей, были выведены в 1815 году Коши. Но Коши был заинтересован только аналитической стороной вопроса. Геометрическая трактовка его результатов принадлежит Гельмгольцу.

В указанном выше мемуаре Гельмгольца принцип сохранения вихрей был обоснован во всей полноте. Более того, там же указано правило определения скоростей движения вихревых шнурков, находящихся в идеальной несжимаемой жидкости, и тех частей жидкой массы, где отсутствуют вихри. Им же указана аналогия между скоростями движения частиц жидкости и силами действия гальваниче-

ских токов на магнитный полюс. Все последующие работы, появившиеся позже, по существу являются расширением и обобщением результатов Гельмгольца.

Бельтрами, пользуясь теоремами, выведенными Гельмгольцем, дал правило определения скоростей частиц сжимаемой жидкости, находящейся в вихревом движении и замкнутой конечным объемом. Это правило, устанавливающее электродинамические аналогии, известно как теорема Бельтрами.

Крупный шаг вперед сделал Кирхгоф. В своих «Лекциях по математической физике» он дал дифференциальные уравнения движения прямолинейных и параллельных вихревых шнурков, находящихся в неограниченной массе несжимаемой жидкости. Он же указал четыре интеграла этих уравнений.

Основываясь на уравнениях Кирхгофа, Гребль решил несколько задач о плоском движении трех, четырех и  $2n$  вихрей. Задачу о четырех вихрях Гребль ограничивает существованием в расположении вихрей плоскости симметрии; движение  $2n$  вихрей ограничивает предположением существования в расположении вихрей  $n$  плоскостей ортогональной симметрии.

Два года спустя после работы Гребля появилась работа Коотса, в которой он рассмотрел движение вихревого кольца и показал, что кольцеобразная форма вихря – форма устойчивая. Изучением движения вихревых колец много занимался также Дж. Томсон. Вихревым движениям в сжимаемой жидкости посвящены работы Гретца и Шре.

Движение вихрей, ограниченных стенками, изучал сам Гельмгольц. Рассматривая движение 2-х прямолинейных параллельных вихрей в идеально несжимаемой жидкости, Гельмгольц показал, что плоскость, делящая расстояние между двумя вихрями с равными по величине напряженностями, но разными по знаку, может приниматься за стенку, если она перпендикулярна к указанному расстоянию. Вихрь будет двигаться параллельно этой стенке, и весь эффект стенки сводится, таким образом, к эффекту, происходящему от изображения вихря, если стенку рассматривать как зеркало.

Гринхилл в 1878 г. рассмотрел задачи о движении вихрей в жидкости, ограниченной цилиндрическими поверхностями. Пользуясь методом изображений, он решил задачи о плоском движении одного и двух вихрей внутри и вне поверхности круглого цилиндра..

Нельзя не упомянуть об участии в рассмотрении частных случаев в данной теореме сохранения вихрей Лагранжа. В своей «Аналитической механике» (1788 г.) он доказывает, что движение идеальной жидкости, которая обладает потенциалом скоростей в определенный момент времени, остается неизменным на всем протяжении движения. В дальнейшем Коши и Стокс доказали, что любая частица идеальной жидкости не может получить вращательное движение при содействии окружающей среды, если она не обладает им в начальной точке отсчета времени.

Рейнольдс в ходе экспериментальных исследований установил критерий перехода ламинарного течения в трубах круглого сечения в турбулентное и установил критерий, который характеризует критическое соотношение между инерционными силами и силами вязкости, при установленном значении, которого ламинарное течение преобразуется в турбулентное и, в дальнейшем, в вихревое. Данное соотношение  $Re = \rho v l / \eta$ , получило название – число Рейнольдса, где  $\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – скорость потока,  $l$  – линейный размер,  $\eta$  – динамический коэффициент вязкости. Он позволяет определить характерные условия образования турбулентности и вихрей в определенных условиях течения жидкости вблизи поверхностей и форм.

В 1839 г. Свенберг доказал следующую теорему: угловые скорости вращения частиц в различных положениях ее на траектории всегда обратно пропорциональны квадратам расстояния ее от траектории движения. Отсюда заключение: частица жидкости, получив в какой-то момент угловую скорость, никогда не перестаёт вращаться и, наоборот, частица жидкости не будет вращаться, если в начале движения ее угловая скорость была равна нулю.

В это время рядом ученых были решены многочисленные частные задачи вихревого движения. Совершенно особую задачу поставил Н. Е. Жуковский [5], который, пользуясь методом конформного отображения, решил задачу о движении

вихря вблизи остряя клина, погруженного в жидкость. Рассматривая траектории вихря, он показал, что вихревой шнур всегда уклоняется от подносимого к нему ножа. Впоследствии Жуковский разработал теорию так называемых «присоединенных» вихрей, имеющую фундаментальное значение для многих приложений.

В. Томсон, основываясь на теореме о сохранении вихрей, выдвинул особую атомистическую гипотезу. Он предположил, что все пространство Вселенной заполнено эфиром – идеальной жидкостью, в которой атомы материи представляют собой бесконечно малые замкнутые вихри, зародившиеся в этой жидкости, возвращаясь к концепции Декарта. Разнообразие свойств атомов Томсон объяснял многообразием движений, в котором находятся частицы одного простого вещества. Вихревая теория атомов, созданная В. Томсоном, не получила признания и развития. Только в 20-х годах XX столетия немецкий гидродинамик А. Корн попытался вновь воскресить идеи В. Томсона, но применительно не к атомам вещества, а к толкованию природы электрона. Несколько позже Н. П. Кастерин сделал попытку построения вихревой теории элементарных частиц. Однако идеи Корна и Кастерина были встречены с большим недоверием, вследствие чего они оказались изолированными и невостребованными.

С развитием авиации ученые натолкнулись на необходимость изучения вихревых образований при обтекании твердых тел. В этом отношении особого внимания заслуживают работы Кармана [6] и Н. Е. Жуковского [5]. Первый подробно изучал поведение так называемой вихревой дорожки Кармана. Имеются также работы А. А. Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости» и «О вихрях в жидкости с меняющейся температурой», в которых дана постановка задач о движении вихрей в сжимаемой жидкости. Наконец, следует упомянуть об исследованиях Оззена, который впервые поставил и решил ряд задач о движении вихрей в вязкой жидкости.

Сложность задач турбулентной и вихревой газовой динамики приводит к тому, что исследователи используют в своих изысканиях упрощенные варианты моделей явлений, но это не всегда оправданно с научной точки зрения. К примеру, в жидких вихрях было использовано представление о том, что центральная часть

линейного вихря вращается в соответствии с законом вращения твердых тел, хотя для этого предпосылок не существует. Авторы часто прибегают к моделям, которые не имеют отношения к изучаемым физическим явлениям, а пренебрежение сжимаемостью газа часто используется там, где это не допустимо. В некоторых случаях не берутся во внимание вязкость, температура и другие физические характеристики, так что гидродинамические теории не всегда поддерживаются термодинамикой.

### **1.5. Общее представление о вихревом движении сплошной среды. Некоторые свойства и характеристики такого движения**

Вихревое движение - движение жидкости или газа, при котором их малые элементы (частицы) перемещаются не только поступательно, но и вращаются около некоторой мгновенной оси. Существует весьма обширная литература по этой проблеме (в частности, см. [9, 11, 18, 35]).

В подавляющем большинстве работ по вихревым движениям среда считается сплошной и её атомарное строение игнорируется. Мельчайшими частицами среды считаются некоторые дифференциально-малые объёмы её. Предполагается, однако, что такие объёмы содержат достаточное число частиц атомарного масштаба, что вещество в них характеризуется непрерывной плотностью и, при переходе от одного элементарного объёма к другому, свойства вещества меняются непрерывно. При таких представлениях в теории вихревых движений используются уравнения гидродинамики или газодинамики (уравнения Эйлера или уравнения Навье - Стокса).

Различают два типа течения сплошных сред: 1) спокойные, плавные и 2) нерегулярные, со значительным перемешиванием среды и хаотическим изменением скоростей и других параметров. Первые называют ламинарными, а для вторых Томсон предложил термин "турбулентные" (лат. turbulentus - бурный, беспорядочный).

дочный). Большинство течений в природе и технике относятся именно ко второй, наименее изученной группе. В этом случае применяют статистические (связанные с осреднением по времени и пространству) способы описания. Во-первых, потому, что практически невозможно уследить за пульсациями вещества в каждой точке течения, а во-вторых, эти данные бесполезны: их нельзя использовать в конкретных приложениях.

Не следует смешивать разделение на ламинарное и турбулентное течение с разделением на безвихревое и вихревое [12, 36, 37, 38].

Поскольку турбулентность - одно из глубочайших явлений природы, при самом общем подходе к его изучению оно смыкается с философским проникновением в суть вещей. Т. Карман очень образно охарактеризовал это, сказав, что, когда предстанет перед Создателем, первое откровение, о котором будет просить, - раскрыть тайны турбулентности. Турбулентное течение — явление, заключающееся в том, что при увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самоизвестно образуются многочисленные нелинейные фрактальные волны и обычные, линейные различных размеров, без наличия внешних, случайных, возмущающих среду сил и/или при их присутствии. Для расчёта подобных течений были созданы различные модели турбулентности. Волны в среде могут появляться закономерно, например, в преднамеренном эксперименте, или же, случайно. В последнем случае их размер и амплитуда меняется хаотически в некотором интервале. Они возникают чаще всего либо на границе, у стенки, либо вокруг находящихся в среде неоднородностей. Они могут образоваться на струях.

В теории турбулентности сплошная среда подчиняется кинетическому уравнению Больцмана [39, 40] и уравнениям Эйлера (когда среда газовая), или уравнениям Навье - Стокса (когда среда жидкая) или уравнениям пограничного слоя. Система уравнений Навье — Стокса (совместно с уравнением сохранения массы или уравнением неразрывности) описывает множество турбулентных течений с достаточной для практики точностью.

Обычно турбулентность наступает при превышении некоторого критического параметра, например числа Рейнольдса или Релея (в частном случае скорости по-

тока при постоянной плотности и диаметре трубы и/или температуры на внешней границе среды).

При определённых параметрах турбулентность наблюдается в потоках жидкостей и газов, в многофазных течениях, жидких кристаллах, квантовых Бозе- и Ферми-жидкостях (напр., в сверхтекучем гелии), магнитных жидкостях, плазме (при турбулентном горении) и других сплошных средах. Турбулентность также наблюдается при взрывах звёзд, в нейтронных звёздах и туманностях. Турбулентность возникает самопроизвольно, когда соседние области среды следуют рядом или проникают одна в другую, при наличии перепада давления или при наличии силы тяжести, или когда области среды обтекают непроницаемые поверхности. Она может возникать при наличии вынуждающей периодической или случайной силы. Обычно случайная внешняя сила и сила тяжести действуют одновременно. Мгновенные параметры потока (скорость, температура, давление и пр.) при этом хаотично колеблются вокруг средних значений. Зависимость квадрата амплитуды от частоты колебаний (спектр Фурье) является непрерывной функцией.

Подавляющее большинство течений жидкости и газа, которые происходят в природе или осуществляются в технике, включают в себя вихревое движение. При движении воды в трубе имеет место вихревое движение, как в случае ламинарного, так и в случае турбулентного течения. Вращение объемов обусловлено здесь тем, что на стенке, из-за прилипания жидкости, скорость ее равна нулю, а при удалении от стенки быстро возрастает, и скорости соседних слоев значительно отличаются друг от друга. В результате тормозящего действия одного слоя и ускоряющего действия другого возникает вращение частиц, т.е. имеет место вихревое движение. Примерами вихревого движения являются также: вихри воздуха в атмосфере, которые часто принимают огромные размеры и образуют смерчи и циклоны; водяные вихри, которые образуются сзади устоев моста; воронки в воде реки и т. п. Присоединенные вихри образуются также в воздухе, за крылом движущегося самолета или иного быстро летящего тела.

Вращающиеся частицы среды могут образовывать вихревые трубы (рис. 1.3) или отдельные слои. Вихревая трубка не может иметь внутри жидкости ни нача-

ла, ни конца; она или может быть замкнутой (вихревое кольцо), или должна иметь начало и конец на границах жидкости (например, на поверхности обтекаемого тела; на поверхности сосуда, внутри которого заключена жидкость; на поверхности земли — в случае смерчей, на поверхности воды или на дне реки — в случае вихрей в текущей воде и т.п.).

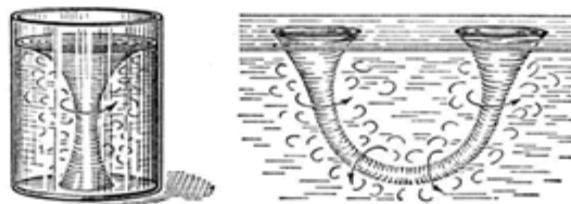


Рис.1.3.- Вихревые трубы

За редким исключением, движение жидкости или газа почти всегда бывает вихревым. Так, вихревым является ламинарное течение в круглой трубе, когда скорость распределяется по параболическому закону, течение в пограничном слое при плавном обтекании тела и в следе за плохо обтекаемым телом. Вихревой характер носит любое турбулентное течение. Выделение класса «вихревое движение» оказывается осмысленным, благодаря тому, что при преобладании инерционных сил над вязкими (при очень больших числах Рейнольдса) типична локализация завихренности в обособленных массах жидкости — вихрях или вихревых зонах.

Количественно вихревое движение характеризуется вектором  $\omega$  угловой скорости вращения, зависящим от координат точки и времени. Вектор  $\omega$  называется вихрем среды в данной точке; если  $\omega = 0$  в некоторой области течения, то в этой области течения безвихревое. Линии поля вектора  $\omega$  для данного момента времени называются вихревыми линиями. Эти линии, проходящие через точки замкнутого контура, выделяют в жидкости вихревую трубку. Компоненты вектора  $\omega$  (компоненты вихря) выражаются через компоненты вектора скорости  $v$ :

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v \quad (1.1)$$

Согласно классическим теоремам Гельмгольца, в предельном случае движения невязкой жидкости, плотность которой постоянна или зависит только от давления, в потенциальном силовом поле вихревые линии вмороожены в среду, то есть в процессе движения они состоят из одних и тех же частиц жидкости. Вихревые трубы при этом оказываются вморооженными в среду, а их интенсивность сохраняется в процессе движения. Сохраняется также циркуляция скорости по любому контуру, состоящему из одних и тех же частиц жидкости (теорема Кельвина). Если при движении область, охватываемая данным контуром, сужается, то интенсивность вращательного движения внутри него возрастает. Это важный механизм концентрации завихренности, реализующийся при вытекании жидкости из отверстия в дне сосуда (ванны), при образовании водоворотов вблизи нисходящих потоков в реках и определяющий образование циклонов и тайфунов в зонах пониженного атмосферного давления, в которые происходит подтекание воздушных масс.

Если обтекание тела происходит при больших  $Re$ , завихренность порождается в узких зонах — в пограничном слое — проявлением вязких эффектов, а затем сносится в основной поток, где формируются отчетливо видимые вихри, некоторое время эволюционирующие и сохраняющие свою индивидуальность. Особенно это проявляется в образовании за плохообтекаемым телом регулярной вихревой дорожки. Вихреобразование в следе за плохообтекаемым телом определяет основную часть лобового сопротивления тела, а образование вихрей у концов крыльев летательных аппаратов вызывает дополнительное индуктивное сопротивление.

## **1.6. О теории вихревых движений в газах и газообразных средах**

Нельзя отождествлять вихревые процессы в жидкостях и газах. Это совершенно разные среды. Основное отличие — жидкость практически не сжимаема, а газ

стремится занять весь объем и может сжиматься многократно. Второе очень важное отличие - частицы жидкости имеют слабые связи между собой, которые ответственны за явление упругости. В газе этого нет. Газ обладает упругостью только при сжатии в замкнутом пространстве. Жидкости присущи эффекты скольжения, а газу нет. Вихревые газовые образования имеют уплотненные стенки, что невозможно в жидкой среде. Ввиду сказанного, теории вихревых процессов в жидкостях и газах исходят из различных базовых представлений. [7, 8, 11, 41]

Самым простым вихревым газовым образованием является вихревая нить (линейный вихрь). Это газовая трубка с уплотненными стенками. В зависимости от способа движения газа, возможно существование нескольких типов линейных трубок:

1. Простая газовая трубка, в которой существует только вращательное движение газа;



Рисунок 1.4.- Прямая газовая трубка

2. Винтовая газовая трубка, в которой кроме вращательного существует и поступательное движение газа вдоль оси трубы;



Рисунок 1.5.- Винтовая газовая трубка

3. Двухвинтовая газовая трубка, в которой поступательное движение наружных слоев трубы направлено в одну сторону, а внутренних - в другую сторону.



Рисунок 1.6.- Двухвинтовая газовая трубка

Частицы газа в стенках движутся по окружности или по винтовой траектории, практически не сталкиваясь друг с другом. В центре газовой трубы возникает пониженное давление. Это объясняется экранированием стенками трубы от внешнего давления газа. В идеальном случае, при высокой плотности стенок газового вихря и большой скорости их вращения, стенки трубы не пропускают внеш-

ние частицы газа внутрь. В этом случае внутри трубы столкновение частиц газа с окружающими частицами может происходить только со стороны торцов трубы и давление внутри трубы минимально. Чем меньше плотность стенок и чем меньше скорость вращения, тем больше высокоскоростных частиц внешнего газа начинают проникать сквозь стенки, в результате давление внутри трубы увеличивается. Так же, как и в капиллярах со стенками из твердого материала, чем меньше диаметр газовой трубы, тем меньшее давление внутри трубы. Это обусловлено повышением доли боковой составляющей импульсов частиц газа при увеличении диаметра. Вращение стенок газовой трубы обеспечивается равновесием между внешним давлением и суммой внутреннего давления и центробежной силы. Молекулы воздуха в стенках трубы не имеют лобовых столкновений. Они только меняют траекторию движения под действием ударов молекул с внешней стороны. Внешнее давление постоянно. При уменьшении внутреннего давления возникают силы, сжимающие вихрь и уплотняющие его стенки. Чем меньше диаметр трубы, тем больше скорость вращения стенок. В результате столкновений частиц внешнего газа со стенками вращающейся трубы, во вращение вовлекаются и прилегающие к стенкам слои газа. Чем дальше от стенок, тем меньше скорость вращения прилегающих слоев. Так как в газе отсутствует скольжение, то скорость уменьшается без скачков. Благодаря вращению прилегающих слоев линейные вихри могут взаимодействовать друг с другом.

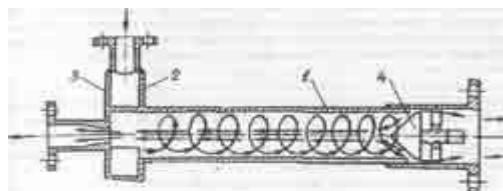


Рисунок 1.7.- Вихревая труба Ранке

Линейную трубку третьего типа можно создать в устройствах, называемых "вихревая труба Ранке". Особенность данного устройства в том, что оно может разделять единый поток на два потока с разной температурой. Долгое время не могли этому явлению дать объяснение. Все дело в особенностях конструкции. Поток газа закручивается в линейный вихрь, который ограничивается металлическими стенками устройства. Под действием центробежных сил молекулы с мак-

симальной кинетической энергией (скоростью вращения) стремятся к стенкам трубы, оттесняя при этом к центру молекулы с меньшей энергией. Происходит естественное непрерывное распределение молекул по скоростям, в зависимости от радиуса вращения. Чем длиннее труба, тем больше молекул успеют перераспределиться по энергиям. Если на дальнем конце выпускать поток через отверстие в стенке трубы или в непосредственной близости от стенок (из пристеночной зоны), то в этом потоке будут отфильтрованы молекулы газа с максимальной кинетической энергией (с максимальной температурой, так как температура напрямую связана со средней кинетической энергией молекул). Поток молекул с минимальной кинетической энергией выпускается на ближнем конце трубы через отверстие по оси трубы. Благодаря этому, поступательное движение газа вблизи оси противоположно поступательному движению газа около стенок.



Рисунок 1.8.- Воронкообразный газовый вихрь

В свободном виде три типа перечисленных выше линейных вихрей в природе вряд ли можно найти. Такие вихри неустойчивы из-за граничных условий на торцах. Здесь сопротивление среды резко возрастает из-за увеличения площади соприкосновения, в результате чего скорость вращения падает, а диаметр вихря возрастает. Торцы линейного вихря в естественных условиях стремятся приобрести воронкообразный вид. Под воздействием внешних условий воронкообразный вихрь еще может и изгибаться.

При некотором уровне изгиба возможно срастание торцов воронкообразного вихря. В этом случае возможно образование симметричного вихревого кольца. Искусственным способом такое кольцо проще всего получить с помощью другого механизма - резкого выхлопа тонкой струи.

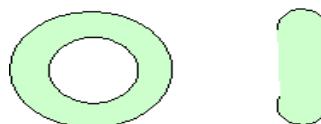


Рисунок 1.9.- Вихревое кольцо

У вихревого кольца появляется ряд новых свойств. Одно из свойств можно заметить, наблюдая за дымом из трубы. Обычный дым сносится ветром. Но если вдруг из дыма образуется кольцо, то оно начнет двигаться вертикально вверх, не взирая на скорость бокового ветра. Боковой ветер не оказывает влияния на направление движения вихревого кольца. А вот скорость движения кольца увеличивается с усилением ветра. Обнаружено очень интересное свойство вихревого кольца - оно самостоятельно движется без внешних сил. Этот феномен обусловлен возникновением общего потока газа по оси кольца. Сбивая на своем пути частицы среды, этот поток частично защищает вихревое кольцо от давления среды с одного торца. Общий поток аналогичен реактивной струе. Но вихревое кольцо от этой струи не отталкивается, а движется в сторону движения струи. Такой механизм возникновения движения можно назвать обратным реактивным двигателем. Боковой ветер и ветер вслед движению кольца равносильны повышению внешнего давления на стенки вихря, которое влечет уменьшение диаметра трубы с увеличением скорости вращения и, соответственно, скорости движения кольца. Только встречный ветер может уменьшить скорость его движения.

Вихревое кольцо в форме обруча является неустойчивым. Под влиянием внешних воздействий оно начинает делиться, стремясь к максимальному соотношению диаметра трубы к диаметру кольца. Самым устойчивым является вихревое кольцо, у которого диаметр трубы близок к половине диаметра кольца. Вихревое кольцо гораздо устойчивей линейного вихря, так как у него нет торцов с граничными условиями. Благодаря этому внутренняя полость кольца может быть полностью отрезана плотными стенками от внешнего давления газа, в результате чего давление внутри кольца может быть значительно меньше, чем внутри линейного вихря. Большой перепад давлений может обеспечить большую скорость вращения стенок. А чем больше скорость вращения в момент стабилизации, тем устойчивее вихрь, тем больше время релаксации. Различают нескольких типов вихревых колец:

1. Простое вихревое кольцо;
2. Торсионное вихревое кольцо;

### 3. Винтовое вихревое кольцо.

Простое вихревое кольцо можно представить в виде замкнутой простой газовой трубы, у которой скорость вращения вокруг оси симметрии или отсутствует или намного меньше скорости вращения стенок трубы. Торсионное вихревое кольцо можно представить в виде замкнутой винтовой газовой трубы, у которой скорость вращения стенок и скорость поступательного движения вдоль оси соизмеримы. Т. о., это замкнутая простая газовая трубка, вращающаяся вокруг оси симметрии со скоростью, соизмеримой со скоростью вращения стенок трубы. Винтовое вихревое кольцо можно представить в виде замкнутой простой газовой трубы, у которой скорость вращения вокруг оси симметрии намного больше скорости вращения стенок трубы. Примером простого вихревого кольца могут служить дымные кольца, формируемые на выходе из труб.

Самыми большими вихрями в атмосфере Земли являются циклоны. Так как скорости поднятия масс воздуха в центре циклона соизмеримы со скоростью вращения масс воздуха вдоль поверхности Земли, то такой вихрь ближе всего к торсионному вихревому кольцу. Различие от классического кольца в том, что в циклонах слишком малы скорости, поэтому плотные стенки не образуются, они как бы размыты в пространстве. Тайфуны и ураганы на порядок меньше размерами, чем циклоны. При примерно прежней скорости поднятия масс воздуха в центре, скорости вращения вдоль поверхности Земли увеличиваются на порядок. Теория циклонов, описывающая их пары (бициклоны), развита в работах Ф. И. Высикайло [25].

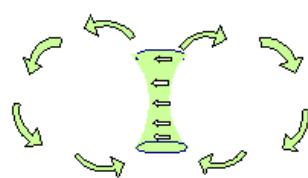


Рисунок 1.10.- Движение воздуха за пределами смерча

Самыми разрушительными вихрями в атмосфере являются смерчи (торнадо) [10, 27] . При примерно прежней скорости поднятия масс воздуха в центре, скоро-

сти вращения вдоль поверхности Земли доходят до максимума. У смерча уже образуются плотные стенки. Зафиксированы случаи вращения стенок смерча, диаметром несколько метров, со скоростью звука. Смерчи образуются в результате быстрого движения вверх прогретых масс воздуха или при столкновении двух воздушных фронтов. Однако над поддержанием их существования, также как и в случаях циклона и тайфуна, работает давление всей атмосферы. На первый взгляд, смерч ближе всего к воронкообразным линейным вихрям третьего типа. Но тщательный анализ позволяет сделать вывод о том, что у смерча есть признаки и винтового вихревого кольца, т. е. смерч является вихревым образованием, промежуточным между линейным и кольцевым. Тело смерча является керном огромного вихревого кольца. Керн - это центральная часть кольца, самая плотная и устойчивая в случаях, когда диаметр  $d$  замкнутой трубы близок к половине диаметра  $D$  вихревого кольца.

В последнее время интерес к данной тематике продолжается. Опубликован ряд важных работ, однако, вопрос о молекулярном происхождении вихрей в газе, об их возникновении и эволюции, пока не рассматривается.

В работах, посвящённых физике атмосферы (см. напр. [78, 85]), рассматриваются газы в гравитационном поле, в том числе, статистическим методам, но вихревым движениям не уделяется особого внимания. В статье [77] рассматривался газ взаимодействующих двумерных вихрей, показано, что распределение вероятностей для системы точечных вихрей принимает вид, аналогичный распределению Гиббса, но образование вихрей не рассматривается.

Эволюция завихренности в жидкости и газе рассматривалась В. В. Марковым и Г. Б. Сизых [22, 23]. Но под эволюцией понимается перемещение вихревых трубок, причём скорость перемещения рассчитывается для вязкой несжимаемой жидкости.

А. М. Гайфуллин [83, 84] рассматривал вихревые течения невязкой и вязкой несжимаемой жидкости. В частности, им рассмотрена задача о взаимодействии вихря с перпендикулярной плоскостью, причём за образ вихря принята врачающаяся полубесконечная игла.

Интересную возможность построения теории вихревых движений на основе уравнений переноса массы, импульса и энергии в сильнонеравновесных условиях открывает работа Ю. К. Товбина [87], но она не получила развития в этом направлении.

Применению методов статистической механики к вихреподобным гидродинамическим структурам посвящены работы О. М. Белоцерковского, Н. Н. Фимина, В. М. Чечёткина [21, 89]. В работе [90] те же авторы предлагают объяснить существование таких структур на основе стационарных кинетических уравнений, а в работе [91] дискретные вихри используются для моделирование турбулентных струй. В статье В.В. Веденяпина и Н.Н. Фимина Н.Н. [92] используется уравнение Лиувилля, но для других целей и объектов.

Из зарубежных работ укажем статью Alam Sarker и Kishore [93], использовавших статистические функции распределения для описания турбулентции в астрофизических задачах. В работе [94] рассматривается генерация 2-мерных вихрей, но авторы не ссылаются на уравнения статистической механики. Модель 3-мерной динамики вихрей в жидкости предложил Е. Meiburg [95].

Некоторые новые экспериментальные данные приведены в работе [88].

Работ, содержащих постановку задачи, предлагаемую в данном исследовании, или решение подобной задачи иным методом, не найдено.

## Глава 2. Кинетическое описание эволюции вихря плотности потока массы в расширяющемся газообразном облаке

Целью данной главы является применение методов кинетической теории для теоретического описания эволюции вихревых движений в неограниченно расширяющихся нестационарных газообразных системах с дальнейшим получением формул, описывающих такое движение в представлении квазинепрерывной среды [42]. Далее рассматриваются системы большого числа частиц  $N$ , причем частицами могут быть как атомы, или молекулы, так и более крупные дисперсные частицы. В последнем случае такие вещества называют аэрозолями [43, 44, 45]. Собственный объём частиц считается достаточно малым, сравнительно с рассматриваемыми макроскопическими объёмами. Такие системы будем называть газообразными, или просто - газами. В неравновесной теории эволюция системы (включая её релаксацию и сопутствующие процессы переноса) существенно зависит от начального состояния системы [30, 46]. Ввиду этого, далее ограничимся определённым классом начальных состояний. Предполагается, что рассматриваемая система в начальный момент образована быстрым диспергированием (испарением) конденсированного тела, вследствие которого образуется нестационарное газообразное облако, неограниченно расширяющееся в вакууме. Сам процесс испарения (диспергирования) считается весьма быстрым и не рассматривается в деталях. Масса системы и число частиц в процессе эволюции сохраняются. Свойства частиц неизменны втечении рассматриваемого времени. Предлагаемый подход ограничен обычно принимаемым представлением о весьма коротком (порядка нескольких времён свободного пробега) кинетическом этапе эволюции, по истечении которого система максвеллизируется. Это состояние системы мы называем начальным. Плотность системы в этом состоянии неоднородна и эволюционирует далее согласно принятым моделям. Исходным же состоянием системы мы будем называть её состояние до диспергирования, причем масса и энергия этого состояния без потерь передаётся образующемуся облаку.

Кинематическое определение завихрённости движения через векторы  $\omega$  и  $v$  (1.1) может оказаться недостаточным для описания динамики вихревого движения газа. Оно не содержит массовых характеристик движущейся среды и без модификации применимо только к средам с постоянной плотностью. Вихревое движение газа создаётся не только полем скоростей  $v$ , но и переносом переменной плотности вещества, следовательно, полем плотности потока вещества  $j$ . Поэтому, предлагается описывать вихревое движение газа вектором

$$\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{j} \quad (2.01)$$

При этом плотность потока вещества  $j$  в общем случае складывается из конвективного слагаемого  $\rho v$  и неконвективного  $j^*$  [30. 55], вызванного неоднородностью системы.

$$\mathbf{j}(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) \mathbf{v}(x, y, z, t) + \mathbf{j}^*(x, y, z, t). \quad (2.02)$$

Тогда компоненты вектора (2.01) имеют вид (зависимость от координат не указывается):

$$R_x = 2\rho\omega_x + \frac{\partial j^*_z}{\partial y} - \frac{\partial j^*_y}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_z - \frac{\partial \rho}{\partial z} v_y \quad (2.03)$$

и аналогично для  $R_y$  и  $R_z$ . В векторной форме:

$$\mathbf{R} = 2\rho\omega + \text{rot } \mathbf{j}^* + [\text{grad } \rho, \mathbf{v}], \quad (2.04)$$

где, как обычно, принято

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Численный коэффициент 2 в формуле (2.04) существенного значения не имеет и может быть устраниён переопределением вектора (2.01).

Из формулы (2.04) следует, что движение может быть безвихревое в кинематическом смысле при  $\omega = 0$ , но является вихревым в динамическом определении. Возможно и обратное, когда равна нулю сумма членов в правой части (2.04), но  $\omega \neq 0$ . Вихрь потока массы пропорционален угловой скорости, когда ра-

вен нулю вихрь неконвективных потоков плотности массы, а плотность среды постоянна, или её градиент коллинеарен скорости.

Неконвективные потоки массы часто в газодинамике не рассматриваются, поскольку в ряде случаев они существенно меньше конвективных.

В дальнейшем тексте термин «вихрь», для краткости, используется для обозначения вектора  $\mathbf{R}$ , не имея в виду физический объект вихревой структуры.

## 2.1. Статистико-механические основания и кинетическое описание моделей

При статистическом подходе к системам многих частиц основной искомой величиной является многочастичная функция распределения  $F_N(q_i, p_i, t)$ , где  $N$  – число частиц,  $t$  – время,  $q_i, p_i$  – фазовые переменные (обобщённые координаты и импульсы системы с  $s$  степенями свободы), причём далее принято  $p_i = m\dot{q}_i$  ( $i = 1 \dots s$ ) и  $s = 3N$ . Для нахождения этой функции используется нестационарное уравнение Лиувилля – Гиббса [28] (далее – УЛГ).

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \frac{\partial F_N}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_N}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0 \quad (2.1)$$

Здесь и далее используется система обозначений, принятая в тензорном исчислении. Повторяющиеся (немые) индексы по правилу, принятому в тензорном исчислении, подразумевают суммирование по всем возможным значениям. Выражение, содержащее только немые индексы, является скалярным инвариантом. Выражение, имеющее один открытый индекс, есть одна из компонент вектора. Выражение, имеющее два открытых индекса, есть компонент тензора 2-го ранга, и т. д. Эта система позволяет избежать в формулах знаков суммы, загромождающих выражение. Случай, где могут быть недоразумения, оговорены особо.

Зная решение уравнения (2.1), можем использовать его для описания интересующих нас систем, как квазинепрерывных сред в рамках кинетической теории, находя макроскопические характеристики исследуемой системы, как функции координат и времени. Для нахождения этих характеристик можно применить известную рецептуру Н.Н. Боголюбова [31,47,48], когда известно  $F_N$ . Так, для плотности вещества в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  имеем:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \int_{\tilde{A}} \hat{\rho} \cdot F_N \cdot d\Gamma , \quad (2.2)$$

где оператор плотности

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i) , \quad (2.3)$$

Здесь и далее  $\mathbf{r}$  есть радиус вектор точки физического пространства в лабораторной СО, в отличие от вектора  $\mathbf{q}_i$ , относящегося к частице. В дальнейшем в интегралах по фазовому объёму нижний символ объема интегрирования не ставится, если интегрирование ведётся по всему фазовому пространству; специальные случаи отмечаются. Далее, в формулах, содержащих кинетические операторы, латинские индексы суммирования нумеруют частицы, в отличие от индексов в фазовом пространстве, нумерующих степени свободы.

Плотность потока вещества как функция координат и времени:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int \hat{\mathbf{j}} \cdot F_N \cdot d\Gamma , \quad (2.4)$$

где оператор плотности потока

$$\hat{\mathbf{j}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i) . \quad (2.5)$$

В индексном обозначении:

$$j_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int \hat{j}_\alpha \cdot F_N \cdot d\Gamma ; \quad \hat{j}_\alpha = \sum_{i=1}^N p_{i\alpha} \cdot \delta(x_\alpha - q_{i\alpha}) . \quad (2.6)$$

Здесь и далее греческие индексы  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$ , т. е., обозначают компоненты вектора в физическом пространстве либо координаты  $i$ -й частицы.

Далее используем для функции  $F_N$ , плотности среды  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и плотности потока массы  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  выражения, полученными ранее в [49], исходя из нестационарного уравнения Лиувилля – Гиббса.

## **2.2. Вихри плотности потока массы в облаке частиц, неограниченно расширяющемся из малого источника в однородном внешнем поле**

Как простой пример, рассмотрим нестационарную газообразную систему частиц, неограниченно расширяющуюся в потенциальном внешнем поле из малого (теоретически – точечного) источника, так что рассматриваются масштабы много большие размеров источника. Для анализа вихревых движений была выбрана микроскопическая модель однородных бесструктурных частиц массой  $m$  [49, 50, 51, 52], в однородном постоянном поле. Система принята неограниченной (т. е., физически достаточно большой, чтобы не рассматривать граничные условия), и свободно расширяется в вакууме. О $Z$  выбрано в направлении действия силы поля  $f$ , которая принята одной и той же для всех частиц. В сущности, это модель нестационарного идеального газа. В простейшем случае примем поле однородным и постоянным, т. е. рассматриваем такие пространственные и временные масштабы, в которых неоднородностью поля и его изменением со временем можно пренебречь. Далее, при рассмотрении неограниченных систем, распространяя интегралы на всё пространство, полагаем, что численная ошибка будет невелика, когда подинтегральные функции достаточно быстро убывают к границам области интегрирования (что с хорошим приближением выполняется для характерных интегралов Пуассона). На границах фазового пространства функция распределения стремится к нулю. Это требование исполняет роль асимптотического граничного условия. Нашей целью является получение выражения вихря плотности потока массы. Отметим, что это выражение отлично от используемого в моделях несжимаемых сред вихря скорости, т. к. в общем случае имеем среду переменной плот-

ности. Далее используем лабораторную систему отсчёта с началом в центре масс при  $t = 0$ .

Вначале рассмотрим простейший случай для свободного расширения газоподобной системы в отсутствии поля. Нестационарное УЛГ в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial F_N}{\partial q_i} + f_i \frac{\partial F_N}{\partial p_i} = 0 \quad (2.7)$$

Сходное уравнение, выполняется для показателя вероятности (термин Гиббса)  $\eta = -\ln F_N$ .

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial \eta}{\partial q_i} + f_i \frac{\partial \eta}{\partial p_i} = 0. \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) найдем методом интегралов однородного лиувиллиана (интолов) [49, 53, 54].

Выберем  $OZ$  по направлению силы. В этом случае для описания движения частиц по осям  $X$  и  $Y$ , как показано в [46] интолами являются величины

$$I_{i1} = p_i, \quad I_{i2} = q_i - p_i t / m. \quad (2.9)$$

Для движения частиц по  $OZ$  имеем интолы:

$$I_{iz1} = p_{iz} - f_i t, \quad I_{iz2} = q_{iz} - p_{iz} t / m + f_i t^2 / 2m, \quad (2.10)$$

где  $f_i$  – сила, действующая на  $i$ -ю частицу.

Ограничимся рассмотрением того класса решений уравнения (2.8), для которых  $\eta(q_i, p_i, t)$  – функционал фазовых переменных, представляемый квадратичной формой интолов. Этот функционал выберем так, чтобы решение (2.8) удовлетворяло тем же требованиям инвариантности, что исходное уравнение, а также дополнительным требованиям, предъявляемым к плотности вероятности (действительности, неотрицательности, нормируемости), и асимптотическим граничным условиям обращения решения в нуль на границах конфигурационного и импульсного пространства. Простейший такой функционал имеет вид квадратичной формы:

$$\eta_I = \eta_0 + ap_{i\alpha}p_{i\alpha} + b(q_{i\alpha} - p_{i\alpha}t/m) \cdot (q_{i\alpha} - p_{i\alpha}t/m) - cp_{i\alpha}(q_{i\alpha} - p_{i\alpha}t/m) + a(p_{iz} - f_it)(p_{iz} - f_it) + b(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m)(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m) - c(p_{iz} - f_it)(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m). \quad (2.11)$$

Здесь сумма по  $\alpha = 1, 2; i = 1 \dots N$ ;  $\eta_0$  – аддитивная константа, определяемая нормировкой;  $a, b, c$  – произвольные константы задачи, определяемые из дополнительных условий; прочие обозначения – те же, что и ранее.

Тогда плотность вероятности приводится к виду:

$$F = \frac{1}{Z_N} \cdot \exp \left[ - \left( k_1 p_{i\alpha} p_{i\alpha} - k_{3i} p_{i\alpha} q_{i\alpha} + b q_{i\alpha} q_{i\alpha} - k_{2i} p_{iz} + k_{4i} q_{iz} + k_{0ii} \right) \right], \quad (2.12)$$

где  $\alpha = 1, 2$ , и для однородных частиц, для любого  $i$ ,  $k_{2i} = k_2; k_{3i} = k_3; k_{4i} = k_4; k_{0ii} = k_0$ , причём неотрицательные коэффициенты (зависящие от времени):

$$k_1 = au \quad (2.13)$$

$$k_2 = (8am^2 ft + 6cmft^2 + 4bft^3)/4m^2$$

$$k_3 = k$$

$$k_4 = (cmft + bft^2)/m$$

$$k_0 = (4am^2 f^2 t^2 + 2cmf^2 t^3 + bf^2 t^4)/4m^2$$

Здесь и далее:

$$u = 1 + ct / am + bt^2 / am^2; \quad k = c + 2bt / m.$$

При отсутствии поля  $k_0 = 0, k_2 = 0, k_4 = 0$ . Статистический интеграл для (2.12)

$$Z_N = \left( \pi / \sqrt{abw} \right)^{3N} \quad (2.14)$$

где

$$w = 1 - c^2 / 4ab \quad (w \in [0, 1]).$$

Для принятой модели, как показано в [49, 50, 51], используя приведенные выше формулы (2.2) и (2.6) можем получить, описывающие эволюцию системы выражение плотности (или концентрации частиц) вещества и плотность потока вещества.

В представлении непрерывной среды имеем плотность:

$$\rho = Nm \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\beta \left[ r^2 + \left( z - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.15)$$

где  $\beta = bw/u$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Проекции плотности потока массы на ОХ и ОY совпадают с приведенными в [52].

$$j_\alpha = \frac{kx_\alpha}{2au} \rho, \quad (2.16)$$

( $\alpha = 1, 2$ ). Проекция на OZ та же, что в [49]:

$$j_3 = \left[ \frac{k(z - ft^2/2m)}{2au} + ft \right] \frac{\rho}{m}, \quad (2.17)$$

Отсюда видно, что поток вещества складывается из направленного потока, создаваемого силовым полем, и потока, создаваемого свободным расширением облака из ускоренно движущегося центра масс. Поток, плотность которого пропорциональна плотности вещества обычно называют конвективным, а поток, плотность которого пропорциональна градиенту плотности вещества, называют неконвективным или кондуктивным. Умножаемая на плотность величина в (2.17) имеет смысл  $z$ -компоненты среднемассовой скорости среды. С учётом зависимости  $k(t)$  и  $u(t)$  (см. выше), среднемассовая скорость в  $z$ -направлении растёт со временем, асимптотически – линейно, оставаясь неотрицательной. На бесконечности, как плотность, так и поток, очевидно, обращаются в нуль при любом конечном  $t$  вследствие асимптотического убывания к нулю плотности вещества. При любых конечных  $x, y, z$  асимптотически  $j_3(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . При конечном  $t$  имеем участок роста скорости с ростом  $z$ , после которого она, пройдя максимум, убывает с плотностью на периферии облака.

Анализ выражений (2.15 – 2.17) показал, что они удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.18)$$

Заметим, что конвективный и неконвективный потоки по отдельности не удовлетворяют этому уравнению.

В гидродинамике и газодинамике обычно пренебрегают неконвективной (диффузионной) частью потока вещества. В начале же развития феноменологической теории переноса рассматривались только потоки, пропорциональные градиентам (кондуктивные). Включение в теорию переноса конвективных потоков произошло уже на следующем этапе [55], и исходило из макроскопического рассмотрения среды в движущейся системе отсчёта.

Будем искать компоненты вектора вихря плотности потока массы для данной модели. Отметим, что этот вектор не только не тождественен, но, вообще, даже не пропорционален обычно рассматриваемому в динамике сплошных сред вихрю скорости. Такая пропорциональность имеет место лишь в частном случае движения несжимаемой среды без учёта неконвективного движения.

Как известно, компоненты вектора вихря выражаются через частные производные от проекций исходного вектора, например:

$$\text{rot}_x \mathbf{j} = \frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \quad (2.19)$$

и т. д.

Находя частные производные по координатам от (2.16) и (2.17), по стандартным формулам получим проекции вихря плотности потока массы:

$$R_x \equiv \text{rot}_x \mathbf{j} = -\frac{2\beta y \cdot ft}{m} \rho; \quad (2.20)$$

$$R_y \equiv \text{rot}_y \mathbf{j} = \frac{2\beta x \cdot ft}{m} \rho; \quad (2.21)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{j} = 0. \quad (2.22)$$

Из найденных выражений обнаруживаются основные свойства вихря плотности потока массы. 1) Этот вектор лежит в плоскости, ортогональной направлению поля. 2) Его проекции – нечётные функции координат  $x$ ,  $y$  и равны нулю на  $OZ$  при любом  $t$ ; выражение (2.20) аннулируется и меняет знак на плоскости  $y = 0$ , а выражение (2.21) – на плоскости  $x = 0$ . 3) В начальный момент вихревые течения

среды отсутствуют. 4) При  $t \rightarrow \infty$  вихревые течения среды асимптотически аннулируются. Совместно с предыдущим это приводит к существованию максимума вихрей при некотором конечном  $t > 0$ . 5) При  $x, y \rightarrow \pm \infty$  вихри также асимптотически аннулируются. Совместно со свойством 2) это приводит к существованию экстремума компонент вихря при конечных  $x, y > 0$ . 6) В отсутствие внешнего поля все проекции  $\text{rot } \mathbf{j}$  равны нулю, вихревые течения не возникают, изотропное свободное расширение от малого источника [56, 57] не приводит к образованию вихрей [52].

Искомый вихрь полностью определяется совокупностью всех 3-х компонент (2.20 - 2.22). Две первые проекции пропорциональны плотности вещества, кроме того имеют дополнительную зависимость от координаты и времени перед экспонентой. Проекция вихря на ось OZ равна нулю. Окончательное выражение вектора вихря плотности потока массы:

$$\text{rot } \mathbf{j} = \mathbf{e}_x \cdot R_x + \mathbf{e}_y \cdot R_y \quad (2.23)$$

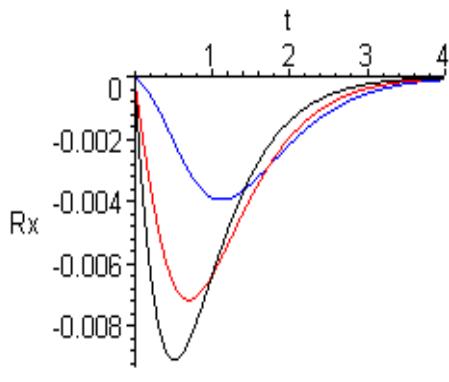
Приведём ещё выражение для модуля вектора вихря:

$$R \equiv |\text{rot } \mathbf{j}| = \frac{2\beta f t r}{m} \cdot \rho . \quad (2.24)$$

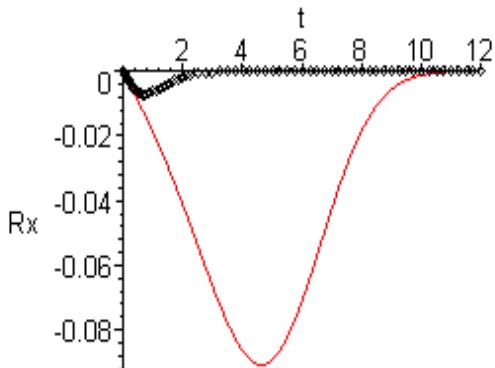
Т. к. найденные величины (2.20) и (2.21) есть функции времени, то для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе эволюции системы. Физической причиной эволюции вихрей является перераспределение импульса и массы среды вследствие одновременно присутствующих хаотического и направленного движения её частиц (молекул или дисперсных частиц). Условием возникновения вихрей является наличие поля, нарушающего изотропию модели, и зависимость плотности вещества от координат и времени.

Ниже дано графическое представление формул, описывающих проекции  $R_x, R_y$ . Все графики построены на ЭВМ при выборе  $a=1, b=1, c=1, f=1, m=1, N=1$ , что означает лишь выбор масштабов и не влияет качественно на ход кривых. При этом координаты и время выражаются в условных масштабах.

На рис. 2.1а представлена зависимость компоненты  $R_x$  от времени (при разном  $z$ ), согласно формуле (2.20). Для сравнения на рис. 2.1б приведены графики  $R_x$  для разных значений параметра  $m$  при  $x=1, y=1, z=1$ , которые показывают, что для массивных частиц (при прочих равных условиях) амплитуды вихря и временные масштабы эволюции растут. Например, при увеличении массы частицы в 10 раз, амплитуда вихря возрастает более, чем в 9 раз, а время его эволюции возрастет на порядок. Формула (2.21) ведёт себя аналогично (с обратным знаком).



— Curve 1  
— Curve 2  
— Curve 3

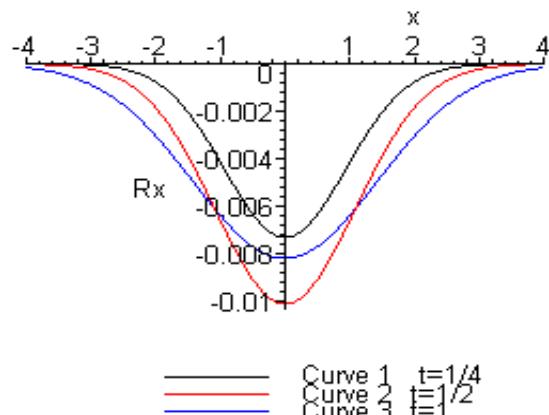


····· Curve 1    m=1  
— Curve 2    m=10

Рис. 2.1а.- Зависимость компоненты вихря  $R_x$  от времени при разном  $z=0, 1, 2$ . ( $x=1, y=1$ )

Рис. 2.1б.- Зависимость компоненты вихря  $R_x$  от массы частиц ( $x=1, y=1, z=1, m=1, 10$ )

На рис. 2.2 - 2.4 даны профили компоненты  $R_x$  по координатам  $x, y, z$  при разном  $t$ .



— Curve 1    t=1/4  
— Curve 2    t=1/2  
— Curve 3

Рис. 2.2.- Профиль компоненты вихря  $R_x$  по ОХ в разные моменты  $t$ . ( $y=1, z=1$ )

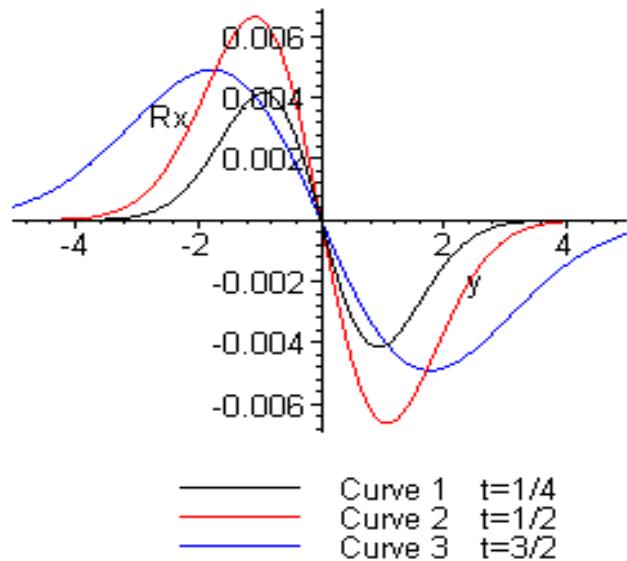


Рис. 2.3.- Профиль компоненты вихря  $R_x$  по ОY в разные моменты  $t$ . ( $x=1, z=1$ )

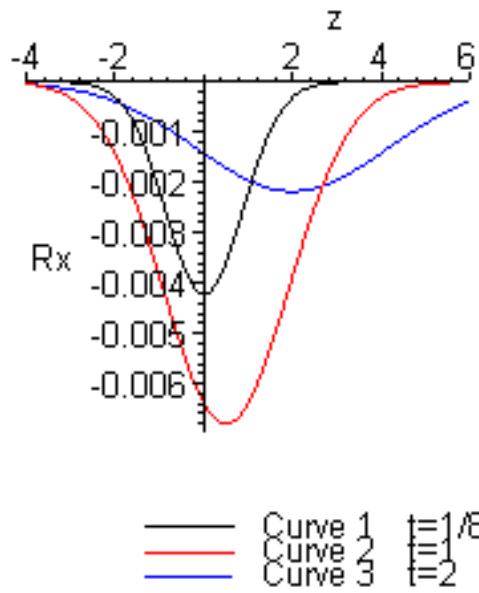


Рис. 2.4.- Профиль компоненты вихря  $R_x$  по ОZ в разные моменты  $t$ . ( $x=1, y=1$ )

Выражения (2.20) и (2.21) имеют максимумы при

$$z = \frac{ft^2}{2m}. \quad (2.25)$$

Выражение (2.20) имеет максимум при  $x = 0$  и экстремумы при

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2\beta}}. \quad (2.26)$$

Аналогичные экстремумы имеет и выражение (2.21).

Т. о., максимум вихря плотности потока массы движется вдоль OZ по закону (2.25) и расположен в плоскости XY на окружности с радиусом, растущим со временем пропорционально  $t^{1/2}$ . Экстремальные значения функций (2.20) и (2.21) убывают со временем. Зависимость функций (2.20) и (2.21) от времени такова, что они имеют экстремум (максимум) по  $t$  при конечном  $t > 0$ , причём значения  $t$ , соответствующие экстремуму, зависят от координат точки.

Следует отметить, что выражения (2.20) и (2.21) определены локально. Интегралы от них по объёму, как и средние по неограниченному объёму значения, равны нулю вследствие нечётности подинтегральных функций при симметричных пределах интегрирования.

Покажем, что в отсутствие поля вихрей нет. Рассмотрим частный случай, когда применима та же модель сферического газообразного облака, расширяющегося в вакуум, но в отсутствии поля, так что входящая в предыдущие формулы сила  $f = 0$  [56, 57]. Используя те же исходные формулы кинетической теории, вычислим проекции плотности потока вещества.

В этом случае все проекции плотности потока имеют один и тот же вид:

$$j_\alpha = \frac{kx_\alpha}{2am} \rho ; (k = c + 2bt/m) \quad (2.27)$$

где  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ . Т. о., в случае отсутствия поля для данной модели вихрь плотности потока массы равен нулю. Физически это означает, что в сферически симметричной изотропной задаче при отсутствии поля вихревые движения не возникают.

На рис. 2.5 – 2.8 представлены 3-мерные графики зависимости X- и Y-проекций вихря от координат и времени. Графики построены на ЭВМ для формулы (2.20) и (2.21) при выборе  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $f=1$ ,  $m=1$ ,  $N=1$ , что означает лишь выбор масштабов и не влияет на ход кривых.

$$R_x$$

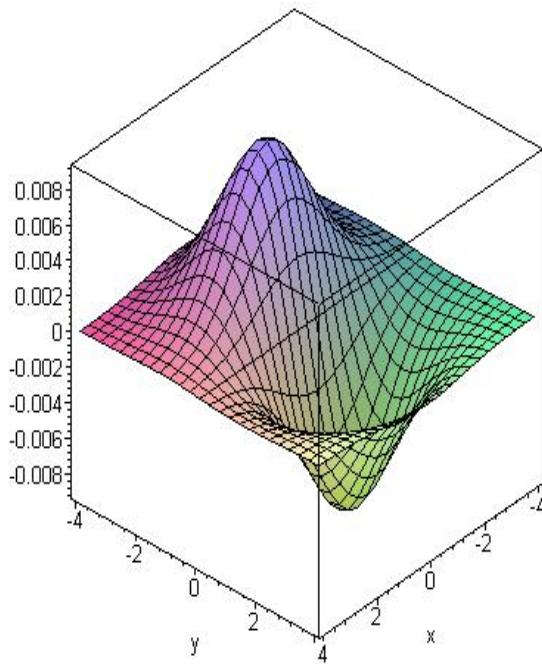


Рис.2.5.- Зависимость X-проекции вихря от координат  $x$ ,  $y$  в момент времени  $t=1$ .

$$R_y$$

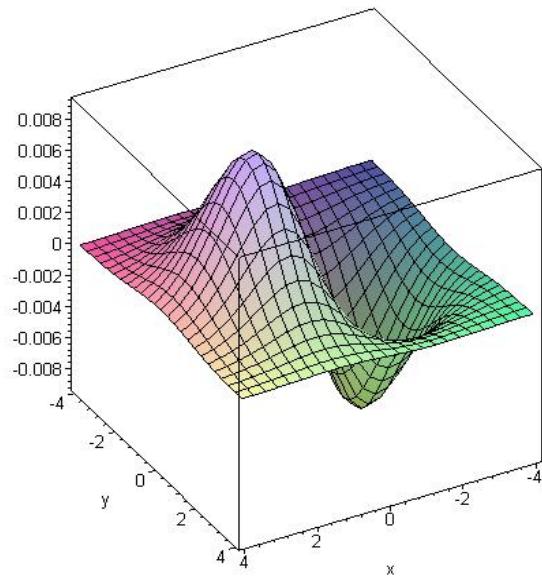


Рис.2.6.- Зависимость Y-проекции вихря от координат  $x$ ,  $y$  в момент времени  $t=1$ .

Рис. 2.5 – 2.6 совместно показывают, что объемное движение составляется сложением двух вращений вокруг ОХ и ОY. Направление этих вращений меняется при переходе через начало координат. Для сохранения момента импульса

необходимо, чтобы вращения в каждом полуобъеме компенсировали друг друга, т. е. одно вращение происходило по часовой стрелке, а другое против часовой стрелки. Интеграл по всему объему (полный момент импульса) равен нулю. Подробнее этот вопрос рассмотрен в гл. 3 (см. также [25])

$$R_x$$

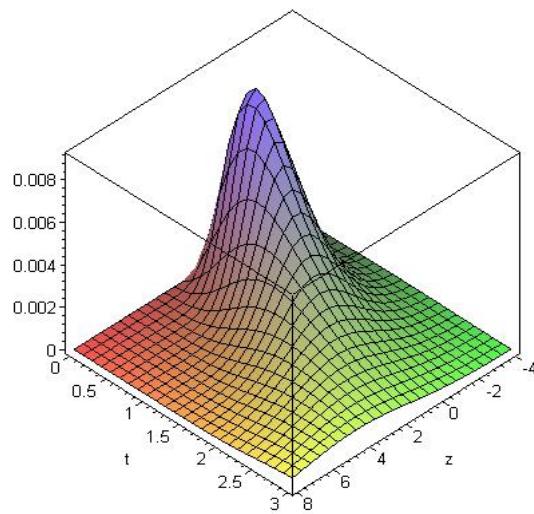


Рис.2.7.- Зависимость X-проекции вихря от координаты  $z$  и времени  $t$

$$R_y$$

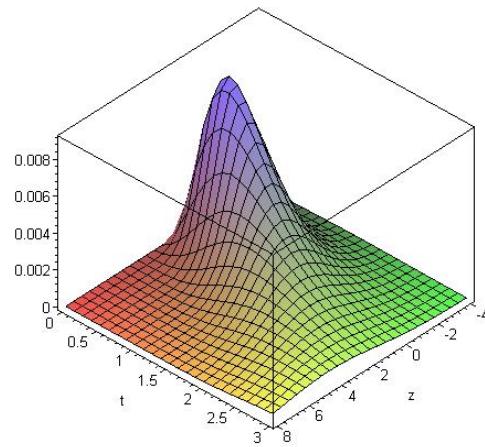


Рис.2.8.- Зависимость Y-проекции вихря от координаты  $z$  и времени  $t$

На рис. 2.7, 2.8 даны 3-мерные графики зависимости проекций вихря от  $z$  и  $t$ .

На рис. 2.9 – 2.11 представлены зависимости квадрата модуля вихря плотности потока массы  $R^2(x, y)$  в последовательные моменты  $t = 0, 1/2, 1$ . Из графиков вид-

но, что эта функция имеет осесимметричный вид с нулевым минимумом на OZ и, с течением времени, её рельеф расплывается при понижении максимума.

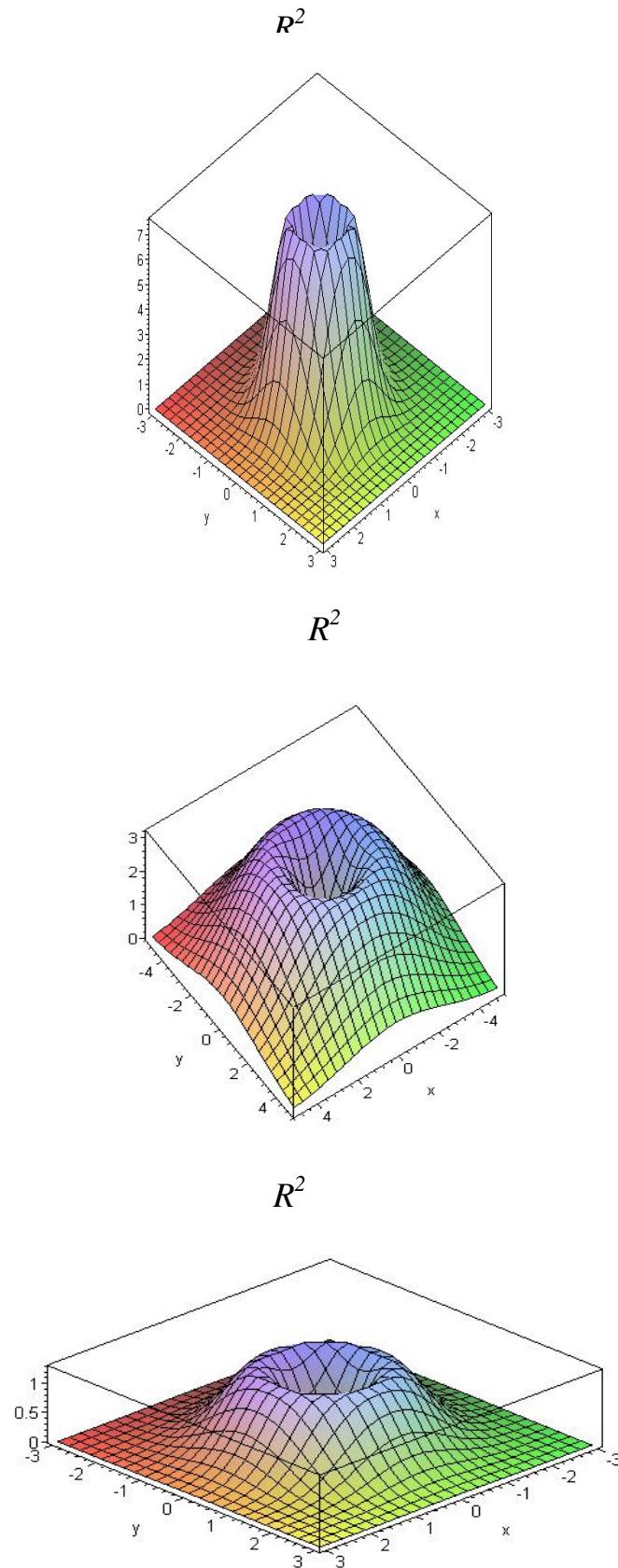


Рис. 2.9 – 2.11.- Зависимость квадрата модуля вихря от координат  $x$ ,  $y$  в разные моменты времени ( $t=0, 1/2, 1$ ).

### 2.3. Поток вещества в неограниченно расширяющемся облаке, созданном диспергированием широкой пластины в однородном поле

Рассмотрим специальную модель при наличии однородного внешнего поля. А именно случай, когда газообразное облако образуется диспергированием широкой пластины большой ширины  $S$ , толщину которой обозначим  $2h$ . Для этой модели, как показано в [49,50,51,58] имеем интолы:

$$I_{iz1} = p_{iz} - f_i t, \quad I_{iz2} = q_{iz} - p_{iz} t / m + f_i t^2 / 2m \quad (2.28)$$

Интолы, соответствующие движениям по ОХ и ОY имеют тот же вид, что в 2.2.

Тогда показатель вероятности, выбранный в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned} \eta_I = & \eta_0 + ap_{ia}p_{ia} + b(q_{ia} - p_{ia}t/m)(q_{ia} - p_{ia}t/m) - cp_{ia}(q_{ia} - p_{ia}t/m) + a(p_{iz} - f_i t)(p_{iz} - f_i t) \\ & + b(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m)(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m) - c(p_{iz} - f_i t)(q_{iz} - p_{iz}t/m + f_i t^2/2m) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Используя интолы (2.28) и функцию (2.29), запишем совместную плотность вероятности, с точностью до нормировочной константы, в виде:

$$F = \frac{1}{Z_N} \cdot \exp \left[ - \left( k_1 p_{ia} p_{ia} - k_3 p_{ia} q_{ia} + b q_{ia} q_{ia} - k_2 p_{iz} + k_4 q_{iz} + k_0 \right) \right] \cdot \prod_{i=1}^N \Delta_i(q_{iz0}, -h, h) \quad (2.30)$$

где

$$\Delta_i(x, -h, h) = 1, \text{ когда } x \in [-h, h], \text{ и } \Delta_i(x, -h, h) = 0, \text{ когда } x \notin [-h, h].$$

Для этой задачи ранее было получено выражение плотности облака в текущем состоянии [49,59]:

$$|\rho\rangle = \frac{\rho_0}{2} \cdot \left\{ \Phi \left[ \sqrt{\beta} \cdot (z + h - \frac{ft^2}{2m}) \right] - \Phi \left[ \sqrt{\beta} \cdot (z - h - \frac{ft^2}{2m}) \right] \right\}, \quad (2.31)$$

где:  $\rho_0$  – исходная плотность вещества в пластине,  $\Phi(\xi)$  – интеграл вероятностей (интеграл ошибок). (Обозначения Дирака bra и ket используются в другом смысле, как в [49], а именно:  $\langle |$  обозначает начальное состояние системы, а  $| \rangle$  - текущее).

Для проекций плотности потока массы на ОХ и ОY в текущем состоянии, вследствие условия задачи, получим:

$$|j_x\rangle = |j_y\rangle = 0. \quad (2.32)$$

Для проекции на ОZ имеем:

$$|j_z\rangle = \frac{ft}{m} \cdot |\rho\rangle + \frac{Nk}{4auV \cdot \sqrt{\pi\beta}} \cdot \left\{ \exp\left[-\beta \cdot \left(z - h - \frac{ft^2}{2m}\right)^2\right] - \exp\left[-\beta \cdot \left(z + h - \frac{ft^2}{2m}\right)^2\right] \right\}, \quad (2.33)$$

где: V – объем пластины.

Поскольку проекции плотности потока массы на плоскости XY равны нулю, то и все производные от них равны нулю. Учитывая определение ротора, его проекция на ось Z

$$\frac{\partial j_2}{\partial x} - \frac{\partial j_1}{\partial y}$$

также равна нулю. Поскольку проекция плотности потока массы на OZ (2.33) не зависит от переменных x и y, то производные от нее по этим переменным тоже равны нулю. Итак, ротор плотности потока массы для данной модели равен нулю. Движение вещества в облаке – безвихревое, несмотря на наличие поля. Таким образом, наличия поля не достаточно для возникновения вихревых течений среды. Как показано в предыдущем разделе, необходимо еще, чтобы плотность среды была нестационарной и зависела от всех координат.

## **2.4. Вихревые движения в свободно расширяющемся газообразном облаке, созданном инерциально движущимся малым источником**

Теперь рассмотрим случай, когда неограниченно расширяющееся облако создано инерциально движущимся точечным источником в отсутствии поля.

Рассмотрим ту же модель, что в п. 2.2, предполагая, что в начальный момент источник двигался с постоянной скоростью  $v_0$ . Очевидно, что все частицы облака, помимо скоростей хаотического движения, будут иметь дополнительно скорость

$v_0$ . Такая задача, очевидно, эквивалентна задаче описания эволюции облака с точки зрения движущегося наблюдателя. Наличие скорости  $v_0$  нарушает сферическую симметрию, и задача становится осесимметричной.

Выберем систему координат так, что ось X направлена по начальной скорости источника, так, что вектор  $\mathbf{v}_0$  имеет только X-проекцию, то есть:

$$v_{0x} = v_0; v_{0y} = 0; v_{0z} = 0.$$

Тогда расширение облака в плоскости YZ происходит свободно и описывается известными формулами [60]. Движение частиц облака вдоль оси X будет отличаться наличием упомянутой начальной скорости.

Согласно результатам работ [49,60], имеем выражение плотности:

$$\rho = \frac{Nmbw\sqrt{\frac{bw}{\pi u}} \exp\left[-\frac{bw(x+v_0t)^2}{u} - \frac{bwy^2}{u} - \frac{bwz^2}{u}\right]}{\pi u} \quad (2.34)$$

Для плотности потока массы имеем:

$$j_x = \frac{1}{2} \frac{N(kx - 2mv_0au + v_0kt)w^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{bw(x+v_0t)^2}{u} - \frac{bwy^2}{u} - \frac{bwz^2}{u})}{au^2\pi\sqrt{u\pi}} \quad (2.35)$$

$$j_y = \frac{1}{2} \frac{Nkyw^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{bw(x+v_0t)^2}{u} - \frac{bwy^2}{u} - \frac{bwz^2}{u})}{au^2\pi\sqrt{u\pi}} \quad (2.36)$$

$$j_z = \frac{1}{2} \frac{Nkzw^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{bw(x+v_0t)^2}{u} - \frac{bwy^2}{u} - \frac{bwz^2}{u})}{au^2\pi\sqrt{u\pi}} \quad (2.37)$$

Плотности потока массы для Y- и Z- проекций такие же, как в первом случае, и отличаются только зависимостью выражения плотности от начальной скорости. Найдем частные производные от компонент потока и получаем следующие проекции вихря плотности потока:

$$\text{rot}_x \mathbf{j} = 0 \quad (2.38)$$

$$\text{rot}_y \mathbf{j} = \frac{2Nw^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}z \cdot \exp\left(-\frac{bw((x+v_0t)^2 + y^2 + z^2)}{u}\right)mv_0}{u^2\pi\sqrt{u\pi}} \quad (2.39)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{j} = \frac{2Nw^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}y \cdot \exp\left(-\frac{bw((x+v_0t)^2 + y^2 + z^2)}{u}\right)mv_0}{u^2\pi\sqrt{u\pi}} \quad (2.40)$$

Отсюда видно, что инерциальное движение системы в целом (или переход в движущуюся инерциальную систему отсчета) также приводит к появлению вихревых движений и в отсутствии поля.

Из выражений проекции (2.38) – (2.40) обнаруживаются основные свойства вихря плотности потока вещества. 1) Этот вихрь лежит в плоскости, ортогональной направлению скорости  $v_0$ . 2) Его проекции – нечётные функции координат  $z$ ,  $y$ ; выражение (2.39) аннулируется и меняет знак при  $z = 0$ , а выражение (2.40) – при  $y = 0$ . 3) В начальный момент вихревые движения присутствуют. 4) При  $t \rightarrow \infty$  вихревые движения асимптотически аннулируются. 5) При  $z, y \rightarrow \pm \infty$  вихревые движения также асимптотически аннулируются. Совместно со свойством 2) это приводит к существованию экстремума вихревых движений при некоторых конечных  $z, y > 0$ . 6) При  $x \rightarrow \pm \infty$  вихревые течения также асимптотически аннулируются. Ввиду этого существуют экстремумы выражений (2.39), (2.40), которые смещаются по оси  $X$ ;

Т. о., для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе её эволюции. В отличие от случая, рассмотренного в п. 2.2, здесь вихрь создаётся не полем, а направленным инерциальным движением облака.

Как и в случае п. 2.2, знакопеременность  $z$ -компоненты вихря при отражении  $y \rightarrow -y$  показывает существование пары противоположно направленных вихрей в полуплоскостях  $y > 0$  и  $y < 0$ .

На рис. 2.12 - 2.14 приведены профили зависимости  $z$ -компоненты вихря по всем трём координатным осям в разные моменты времени ( $y$ -компонента ведёт себя аналогично).

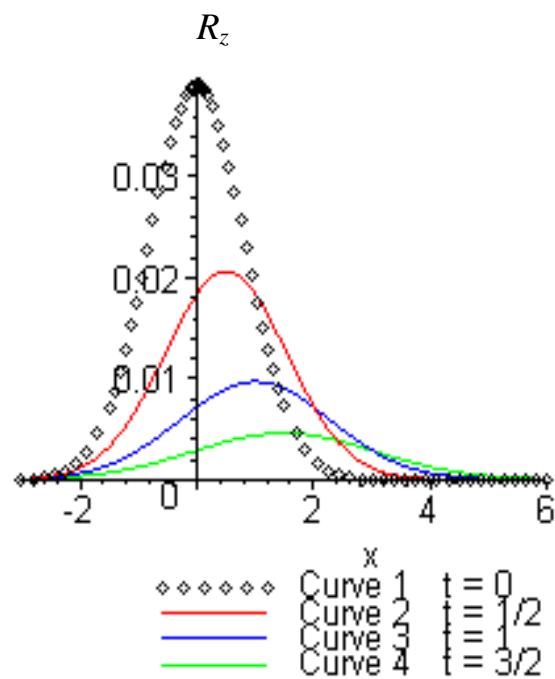


Рис. 2.12.- Профиль компоненты вихря  $R_z$  по ОХ в разные моменты  $t$ . ( $a=1$ ,  $b=1$ ,  $v_0=-1$  )

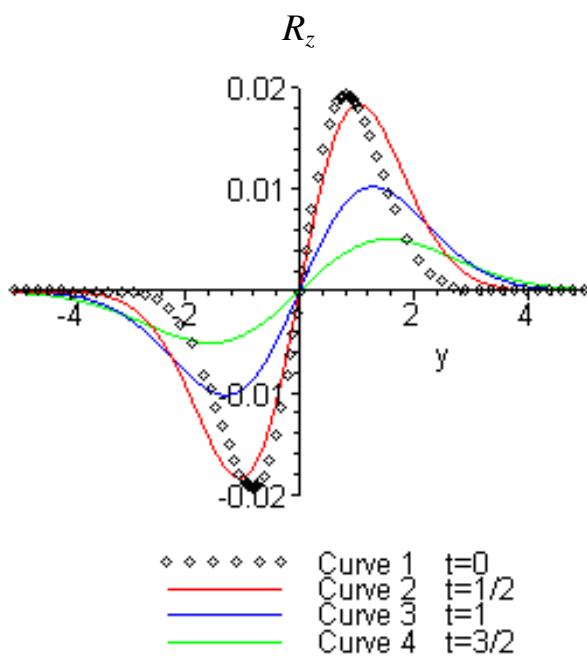


Рис. 2.13.- Профиль компоненты вихря  $R_z$  по ОY в разные моменты  $t$ .

$R_z$

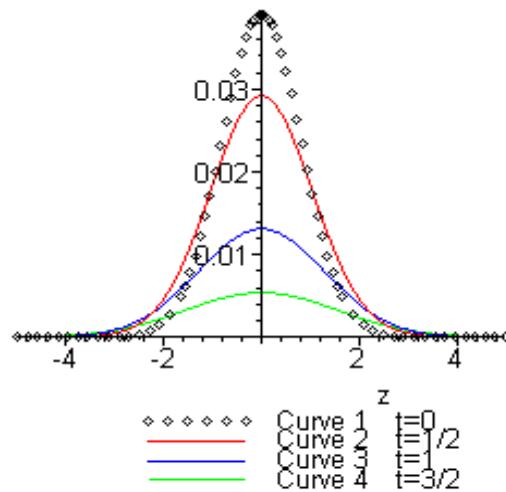


Рис. 2.14 - Профиль компоненты вихря  $R_z$  по ОZ в разные моменты  $t$ .

На рис. 2.15 – 2.17 представлены 3-х мерные графики квадрата модуля вихря плотности потока массы для трех последовательных моментов времени  $t = 0, 1, 2$ . Из рисунка видно, что распределение этой величины в плоскости XY осесимметричное. Обнаруживается концентрическая область, в которой вихревое движение наиболее значительно. Эта область со временем удаляется от оси вихря и движется вдоль ОХ.

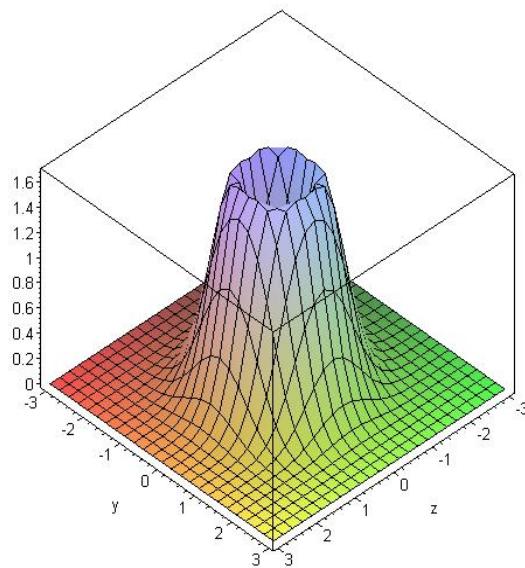
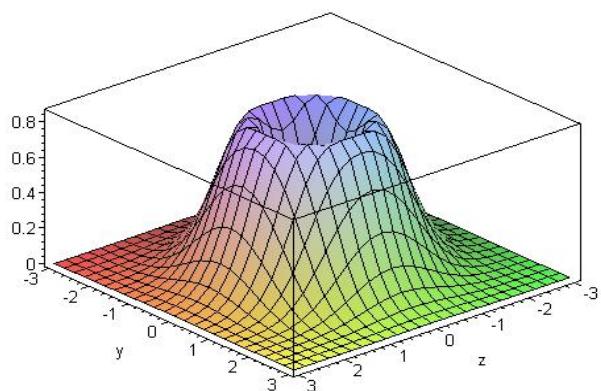
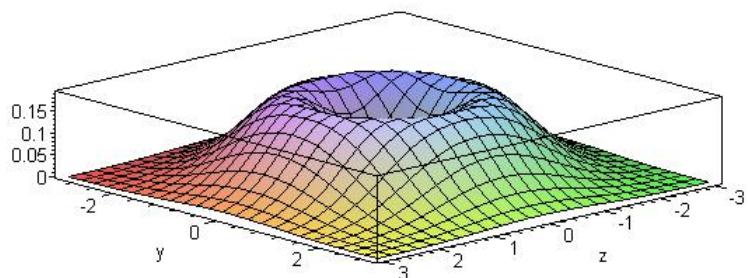
$R^2$  $R^2$  $R^2$ 

Рис. 2.15 – 2.17. - Зависимость модуля вихря  $R^2$  от координат YZ для моментов  $t = 0, 1, 2$ .

## 2.5. Вихревые движения в расширяющемся газообразном облаке, созданном малым источником, движущимся коллинеарно полю

В данном случае допускаем начальное движение сгустка частиц, образующих расширяющееся облако, с постоянной скоростью  $v_0$ , направленной по той же оси Z, что и поле.

Для этого случая эффективная плотность среды имеет вид [49]:

$$\rho = Nm \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\beta \cdot \left[ x^2 + y^2 + \left( z + v_0 t - \frac{ft^2}{2m} \right) \right] \right\}, \quad (2.41)$$

Векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  направлены вдоль OZ, но могут иметь разный знак. Компоненты вектора плотности потока вещества:

$$j_x = \frac{k_3 x}{2am} \rho; \quad (2.42)$$

$$j_y = \frac{k_3 y}{2am} \rho; \quad (2.43)$$

$$j_z = \frac{(k_3 z - k_2)}{2am} \rho. \quad (2.44)$$

При этом:

$$k_2 = (2am + ct)v_0 - 2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2} \quad (2.45)$$

$$k_3 = c + \frac{2bt}{m} \quad (2.46)$$

Отличие (2.42) – (2.44) от соответствующих формул, полученных для случая 1) - в выражениях плотности  $\rho$  и величин  $k_2$  и  $k_3$ . При наличии внешнего поля и начальной скорости выражение (2.44) содержит дополнительно конвективный член, пропорциональный плотности и не являющийся потенциальным. Указанные потоки могут быть коллинеарны или антиколлинеарны. Заметим, однако, что в некоторых задачах наличия поля или начального движения недостаточно для образования вихрей. Для образования вихрей необходимо: 1) наличие конвективного

члена в векторе  $\mathbf{j}$ , и 2) неоднородность плотности с зависимостью от не менее, чем двух координат.

Для нахождения вихря плотности потока вещества найдём все три проекции этого вектора, выражаемые через частные производные от проекций плотности потока по координатам. Проекции вихря плотности потока вещества [61]:

$$\text{rot}_x \mathbf{j} = \frac{\beta y \cdot \left[ -k_3(v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (2.47)$$

$$\text{rot}_y \mathbf{j} = -\frac{\beta x \cdot \left[ -k_3(v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (2.48)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{j} = 0. \quad (2.49)$$

Формулы (2.47) и (2.48) являются естественным обобщением ранее полученных формул (2.20), (2.21) и (2.39), (2.40), в которые они соответственно переходят при  $v_0 = 0$  и при  $f = 0$ .

Возможны два случая для данной задачи см. (Рисунок 2.18).

#### ДВА СЛУЧАЯ:

1) Сила (поле  $F$ ) и скорость  $V_0$   
Коллинеарны (со направленны):  $F \uparrow V_0 \uparrow$

2) Сила (поле  $F$ ) и скорость  $V_0$   
Антиколлинеарны (разно направленны):  $F \uparrow V_0 \downarrow$

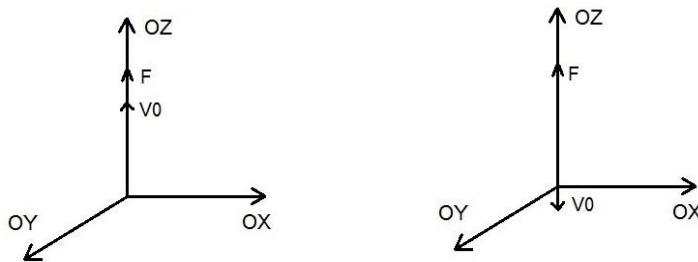


Рисунок 2.18.- Два случая направления  $v_0$  и  $f$ .

- 1) Скорость  $v_0$  и сила  $f$  сонаправлены.
- 2) Рассмотренный выше, где скорость  $v_0$  и сила  $f$  противоположны.

Очевидно для случая 1) выкладки и формулы для проекции вихря (2.47 – 2.49) будут аналогичны, с единственной заменой  $v_0 \rightarrow -v_0$ .

Так же из найденных выражений (2.47 – 2.49), видно, что:

- 1) проекция вихря на ось OZ равна нулю; 2) проекции вихря имеют сложную зависимость от параметров задачи – скорости  $v_0$  и силы  $f$ ; 3) вектор вихря лежит в

плоскости, ортогональной векторам  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{f}$ ; 4) проекции вихря на ОХ и ОY являются нечётными функциями координат  $y$  и  $x$  и обращаются в нуль при  $y=0$  и  $x=0$  соответственно; 5) они обращаются в нуль в пределе бесконечных значений координат и имеют экстремумы при конечных значениях  $y$  и  $x$ ; 6) эти проекции асимптотически обращаются в нуль при  $t \rightarrow \infty$ .

Зависимость Y-проекции вихря  $R_y$  от времени представлена на рис. 2.19 для  $x=1$ ,  $y=1$  при разных значениях  $z$  и начальной скорости ( $p_0 = mv_0$ ) (здесь и далее при построении графиков принято  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $m=1$ ,  $f=1$ ,  $N=1$ ). Зависимость X-проекции вихря от времени аналогична.

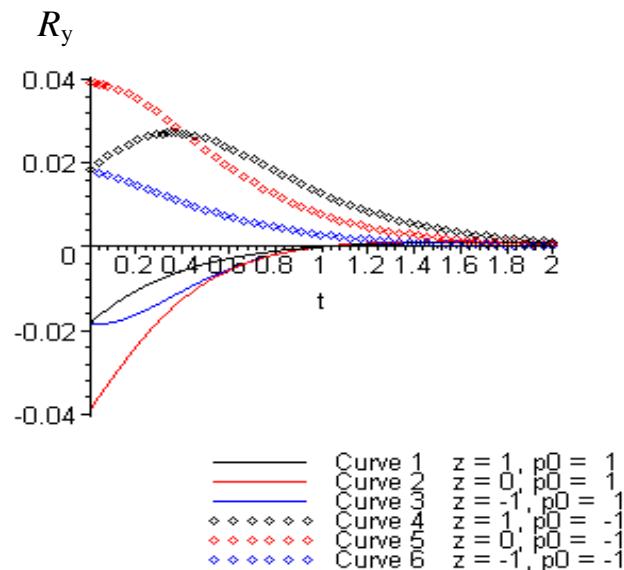


Рис.2.19.- Зависимость Y-проекции вихря от времени при разных значениях  $z$  и скорости  $v_0$ .

На рис. 2.20 представлены профили  $R_y$  по всем трём координатам

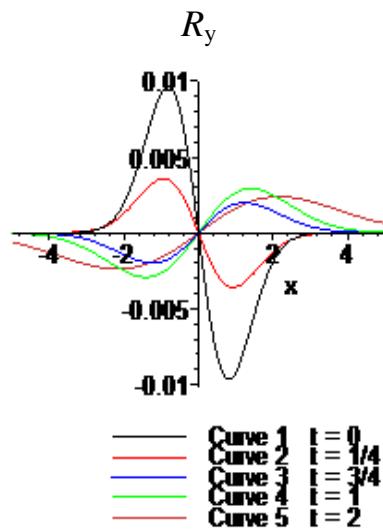


Рис.2. 20.- Профиль  $R_y$  по  $OX$ . [ $y=1, z=1, p_0 = 1/2$ ].

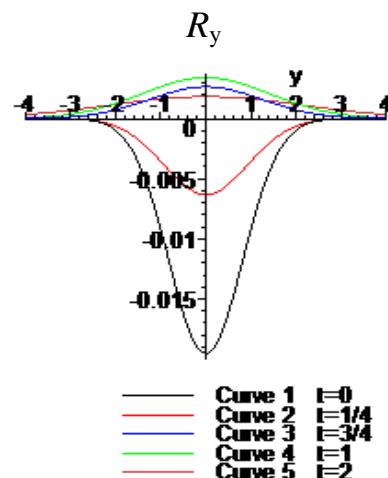


Рис.2.21.- Профиль  $R_y$  по  $OY$ . [ $x=1, z=1, p_0 = 1/2$ ].

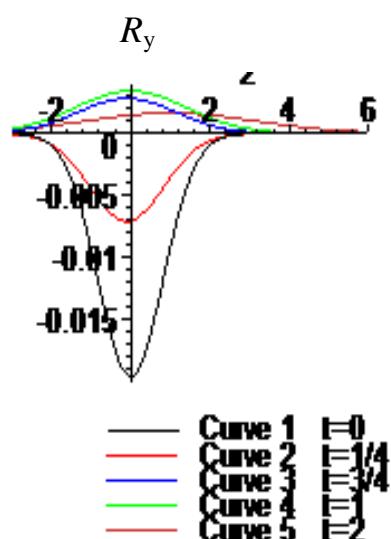


Рис. 2.22.- Профиль  $R_y$  по  $OZ$ . [ $x=1, y=1, p_0 = 1/2$ ].

Отличие этих графиков от графиков, приведённых в п.п. 2.2 и 2.4 в том, что с течением времени проекции вихря меняют знак. Это характерно для случая 2) и является следствием выбора противоположных знаков скорости и силы. Действие поля со временем преодолевает начальное инерциальное движение. В случае 1) это явление отсутствует.

На рис. 2.23 – 2.25 приведены трёхмерные графики квадрата модуля вихря (принято  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $m=1$ ,  $N=1$ ,  $v_0=1/2$ ,  $f=1$ ,  $z=0$ ). Скорость  $\mathbf{v}_0$  и сила  $\mathbf{f}$  направлены противоположно. Показан рельеф квадрата модуля  $R^2$  над плоскостью XY для моментов  $t=0$ ,  $1/4$ ,  $3/4$ . В момент  $t=1/2$  при данных константах  $R^2$  аннулируется, что соответствует вышеуказанной смене знаков проекций.

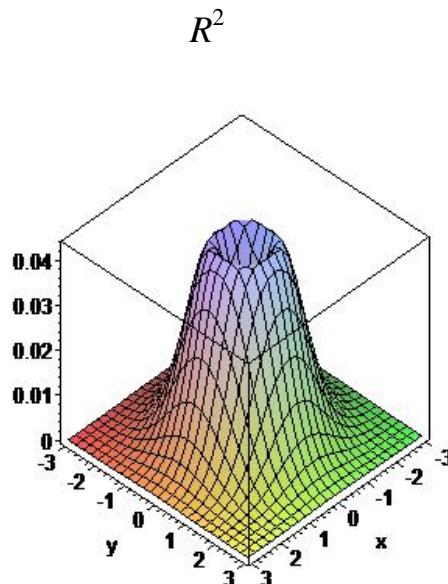


Рис. 2.23.-  $t=0$ .

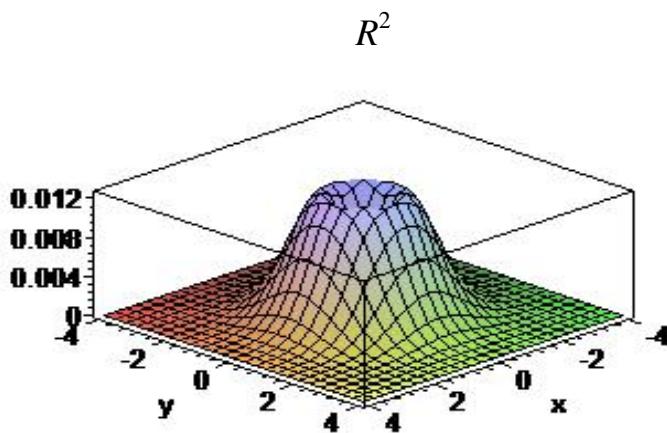


Рис.2.24.-  $t=1/4$

$$R^2$$

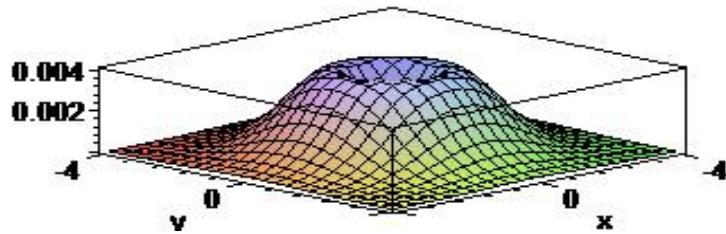


Рис. 2.25.-  $t=4$

Функция  $R^2$  имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на ОЗ и, с течением времени, расплывается при понижении максимума. Процесс убывания вихря не является монотонным, т. к. после его аннулирования по указанной причине втечении некоторого времени будет наблюдаться рост при смене знака. В случае 1) это явление отсутствует. Поле и начальная скорость действуют однаково.

## **2.6. Вихревые движения в расширяющемся газообразном облаке, созданном малым источником, движущемся ортогонально полю**

Далее рассмотрим нестационарное газообразное облако, неограниченно расширяющееся, причём малый источник его начально движется ортогонально к направлению однородного внешнего поля (в отличие от п. 2.5). Частицы облака унаследуют от начального движения источника скорость направленного движения. В простейшем случае примем начальное движение источника с постоянной скоростью  $v_0$ , а поле  $\mathbf{f}$  однородным и постоянным, т. е., рассматриваем такие пространственные и временные масштабы, в которых неоднородностью поля и его изменением со временем можно пренебречь. Ввиду этого далее, при рассмотрении неограниченных систем, распространяя интегралы на всё пространство, полагаем, что численная ошибка будет невелика, когда подинтегральные функции достаточно быстро убывают к границам области интегрирования. Это требование

исполняет роль асимптотического граничного условия для неограниченных систем.

Для данной модели получаем выражение плотности (или концентрации частиц) вещества и плотность потока вещества.

Выбирая поле, направленное по OZ, а скорость  $\mathbf{v}_0$  – по OX, в представлении непрерывной среды имеем плотность [62]:

$$\rho = Nm(\beta / \pi)^{3/2} \cdot \exp\left[-\beta(x - v_0 t)^2 - \beta y^2 - \beta(z - ft^2 / 2m)\right], \quad (2.50)$$

Проекции плотности потока на оси OX, OY, OZ:

$$j_x = \left[ k(x - v_0 t) / 2am + v_0 \right] \cdot \rho \quad (2.51)$$

$$j_y = ky \cdot \rho / 2am \quad (2.52)$$

$$j_z = \left[ k \cdot (z - ft^2 / 2m) / 2am + ft / m \right] \cdot \rho \quad (2.53)$$

Отсюда видно, что поток вещества складывается из трёх ненулевых проекций. Рассмотрим каждый поток. Проекция потока на ось OY состоит из одного члена, в отличие от остальных проекций. Поток создаётся только диффузионным движением среды вследствие свободного расширения облака из ускоренно движущегося центра масс. Проекция потока на ось OX состоит из двух частей: Первая (пропорциональная градиенту плотности)

$$j_{xD} = \frac{Nkx}{2am} \rho \quad (2.54)$$

создаётся расширением облака из ускоренно движущегося центра масс, вторая же (конвективная, пропорциональная плотности)

$$j_{yC} = N \left( \frac{k^2 t}{2am} - 1 \right) v_0 \rho \quad (2.55)$$

создаётся начальной скоростью облака.

Проекция потока на ось OZ, также состоит из двух частей. Первая (пропорциональная градиенту плотности)

$$j_{zD} = \frac{Nkz}{2am} \rho \quad (2.56)$$

создаётся расширением облака из ускоренно движущегося центра масс, вторая (конвективная, пропорциональная плотности)

$$j_{zc} = -N \left( \frac{kft^2}{4aum^2} + \frac{ft}{m} \right) \rho \quad (2.57)$$

создаётся силой, действующей на частицы.

На бесконечности, как плотность, так и поток, очевидно, обращаются в нуль при любом конечном  $t$ .

Найдём компоненты вектора вихря плотности потока массы для выбранной модели. Отметим, что этот вектор не только не тождественен, но, вообще, даже не пропорционален обычно рассматриваемому в динамике сплошных сред вихрю скорости. Такая пропорциональность имеет место лишь в частном случае несжимаемой среды без учёта неконвективного движения. Находя частные производные по координатам от (2.51) - (2.53), по стандартным формулам получим проекции вихря плотности потока вещества [61]:

$$\text{rot}_x \mathbf{j} = -2\beta fty \cdot \rho / m; \quad (2.58)$$

$$\text{rot}_y \mathbf{j} = -2\beta \cdot [mv_0 z - ft(x - v_0 t / 2)] \cdot \rho / m; \quad (2.59)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{j} = 2\beta v_0 y \cdot \rho. \quad (2.60)$$

$$R = \sqrt{(\text{rot}_x \mathbf{j})^2 + (\text{rot}_y \mathbf{j})^2 + (\text{rot}_z \mathbf{j})^2} \quad (2.61)$$

где  $R$  – модуль вихря.

Из найденных выражений обнаруживаются основные свойства вихря плотности потока. 1) Вихрь является объёмным и, в общем случае, имеет все три ненулевые проекции. 2) В начальный момент вектор вихря лежит в плоскости  $YZ$ , проекция на  $OX$  равна нулю, как в случае п. 2.4 (формулы (2.38) – (2.40)). 3) При  $t \rightarrow \infty$  вихревые течения среды асимптотически аннулируются; это приводит к существованию максимумов проекций вихрей при некотором конечном  $t > 0$ . 4) В отсутствие направленного движения облака и внешнего поля все проекции вихря равны нулю, вихревые течения не возникают. 5) Проекции вихря на  $OX$  и  $OZ$  меняют знак при  $y=0$ , т. о., на полуплоскостях  $y < 0$  и  $y > 0$  эти проекции противоположно ориентированы.

Т. к. найденные величины (2.58) - (2.60) есть функции времени, то для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе эволюции системы. Физической причиной эволюции вихрей является перераспределение импульса и массы среды вследствие одновременно присутствующих хаотического и направленного движения её частиц (молекул или мелкодисперсных частиц). При этом направленное движение создаётся взаимно ортогональными векторами силы  $\mathbf{f}$  и скорости  $\mathbf{v}_0$ .

На рисунках 2.26 – 2.30 представлены профили всех трёх проекций вихря. Во всех случаях принято  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $m=1$ ,  $N=1$ ,  $v_0=1$ ,  $f=1$ .

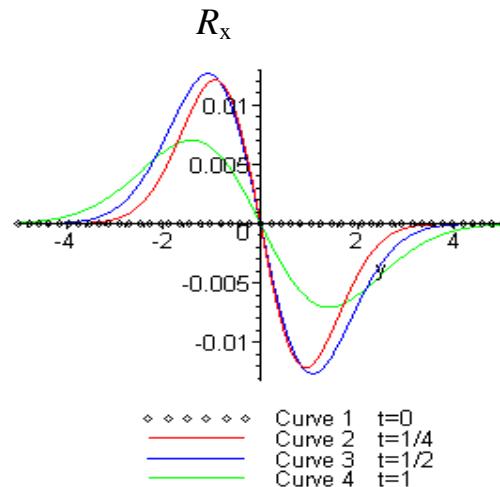


Рис. 2.26.- Профиль компоненты вихря  $R_x$  по ОY в разные моменты  $t$ .

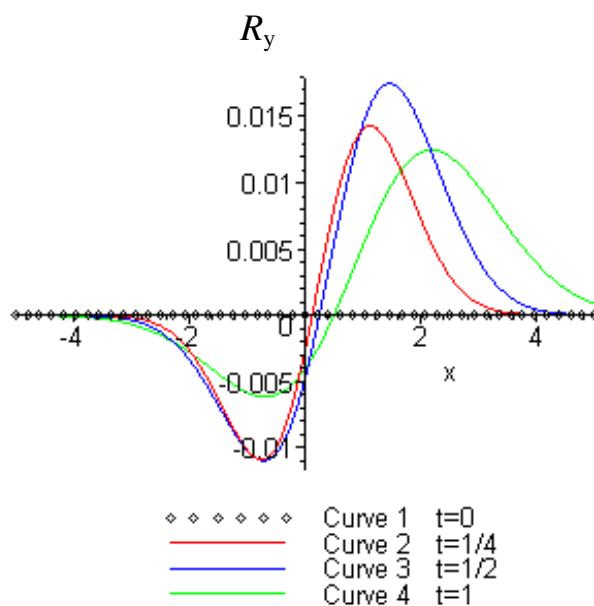
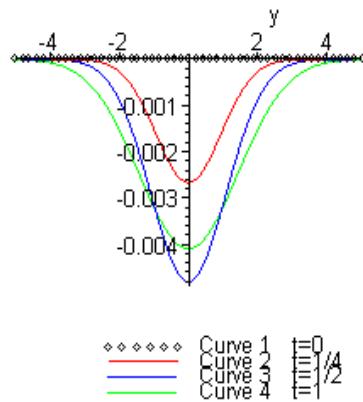
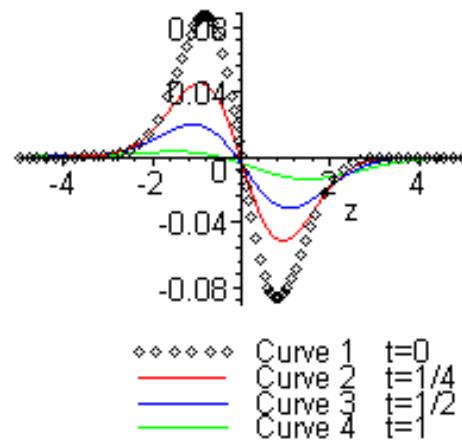
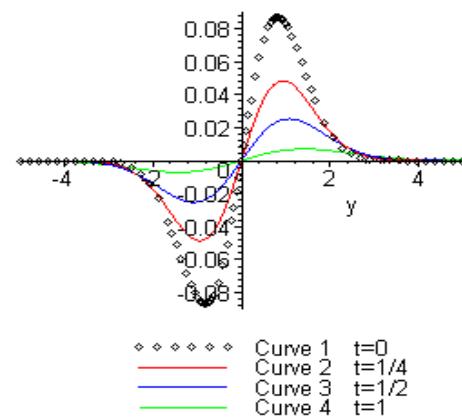


Рис. 2.27.- Профиль компоненты вихря  $R_y$  по ОX в разные моменты  $t$ .

$R_y$ Рис. 2.28.- Профиль компоненты вихря  $R_y$  по ОY в разные моменты  $t$ . $R_y$ Рис. 2.29.- Профиль компоненты вихря  $R_y$  по ОZ в разные моменты  $t$ . $R_z$ Рис. 2.30.- Профиль компоненты вихря  $R_z$  по ОY в разные моменты  $t$ .

При этом, для простоты картины, выбраны профили  $R_x(x)$  для  $[y=0, z=0]$ , профили  $R_x(y)$  для  $[x=0, z=0]$ , профили  $R_x(z)$  для  $[y=0, x=0]$ . В этом случае  $R_x(x)$  и  $R_x(z)$  аннулируются, единственный профиль представляет  $R_x(y)$  (см. рис. 2.26). Для  $R_y$  все три профиля – ненулевые (см. рис. 2.27 – 2.29). Профиль  $R_z(x)$  для  $[y=0, z=0]$  и профиль  $R_z(z)$  для  $[y=0, x=0]$  также аннулируются. Единственный ненулевой профиль представляет  $R_z(y)$  для  $[x=0, z=0]$  (см. рис. 2.30). Как видно из графиков все проекции вихря знакопеременны, их профили описывают в соответствующих полуплоскостях пару противоположно направленных вихрей. Точка перемены знака  $R_y(x)$  движется по оси  $x$  вправо.

На рис. 2.31–2.40 даны 3-мерные графики модуля вихря. На рис. 2.31–2.33 показан рельеф модуля вихря над плоскостью YZ в моменты  $t=0, \frac{1}{2}, 1$  ( $x=0$ ).

$R \cdot 100$

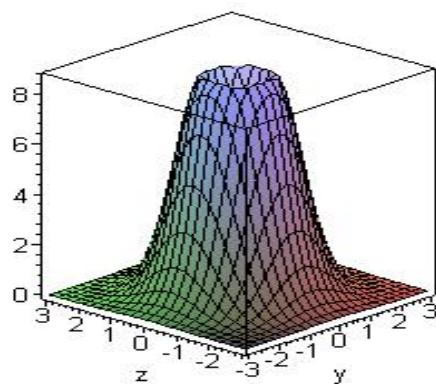


Рис. 2.31.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью YZ при  $t=0$

$R \cdot 100$

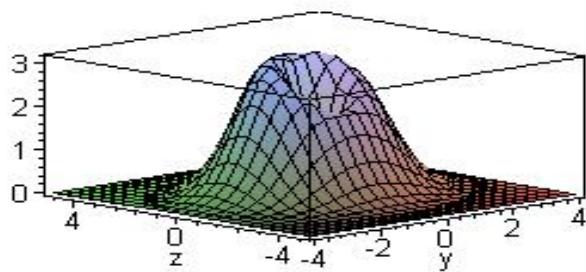


Рис. 2.32.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью YZ при  $t=1/2$ .

$R \cdot 100$

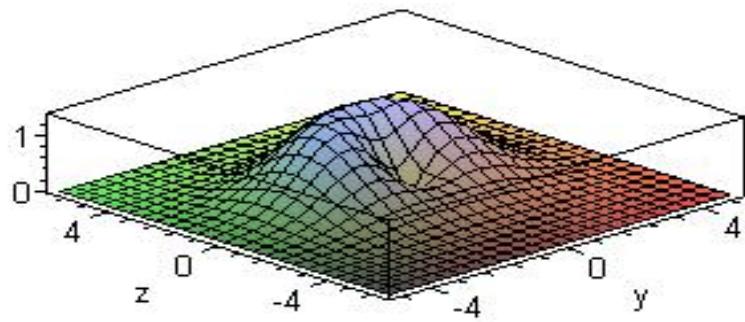


Рис. 2.33.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью  $YZ$  при  $t=1$ .

Из рисунков видно, что осесимметричное распределение модуля вихря со временем нарушается, превращаясь в горб вида полумесяца, движущийся в сторону  $z>0$ . На рис. 2.34 – 2.37 показан рельеф модуля вихря над плоскостью  $XY$  в моменты  $t = 0, 1/2, 1, 3/2$  ( $z=0$ ).

$R \cdot 100$

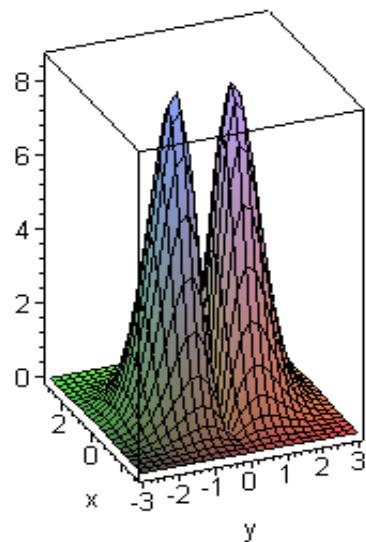


Рис. 2.34.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью  $XY$  при  $t=0$ .

$R \cdot 100$

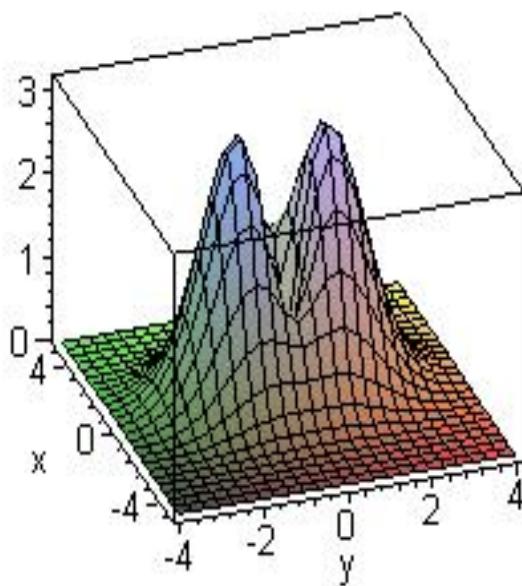


Рис. 2.35.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью  $XY$  при  $t=1/2$ .

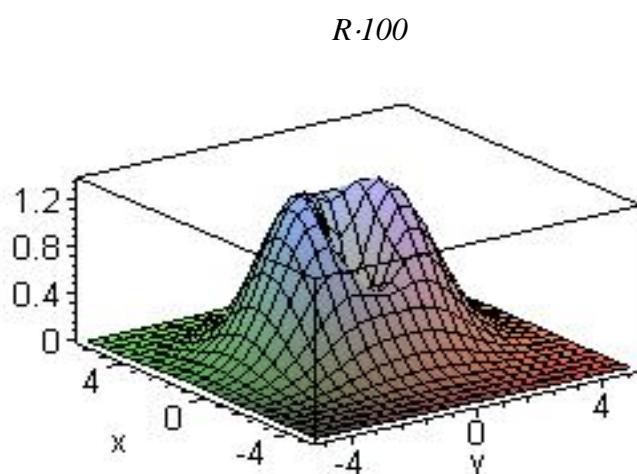


Рис. 2.36.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью  $XY$  при  $t=1$ .

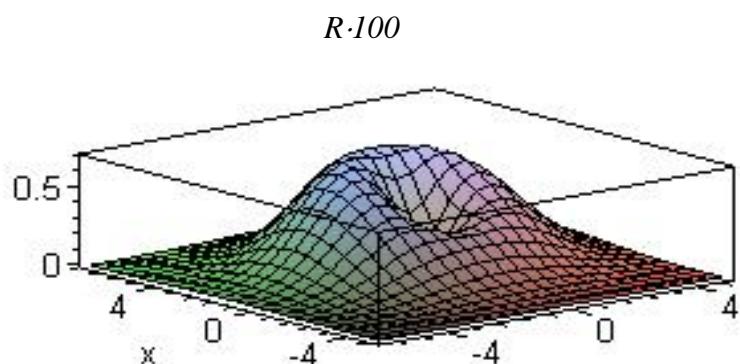


Рис. 2.37.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью XY при  $t=3/2$ .

Здесь начальный «двугорбый» рельеф описывает пару противоположно закрученных вихрей, зеркально симметричных относительно оси Y. Затем возникает их соединение и формируется осесимметричное распределение, причём ось его ( $\parallel OZ$ ) сдвигается в сторону  $x>0$ .

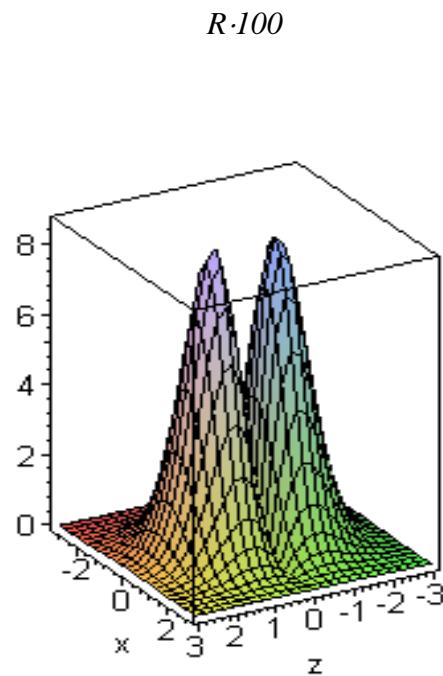


Рис. 2.38.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью XZ при  $t=0$ .

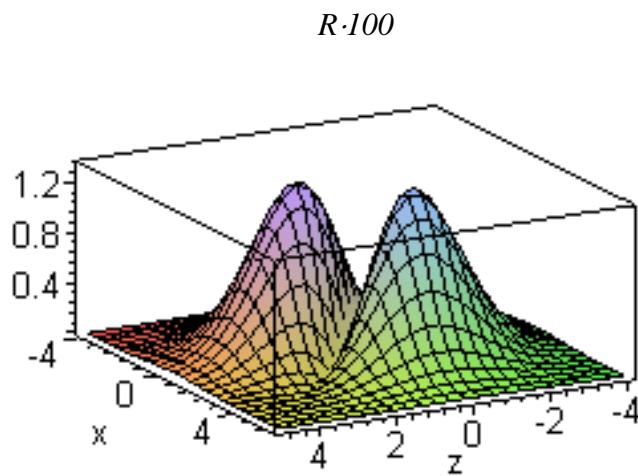


Рис. 2.39.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью XZ при  $t=1$ .

$R \cdot 100$

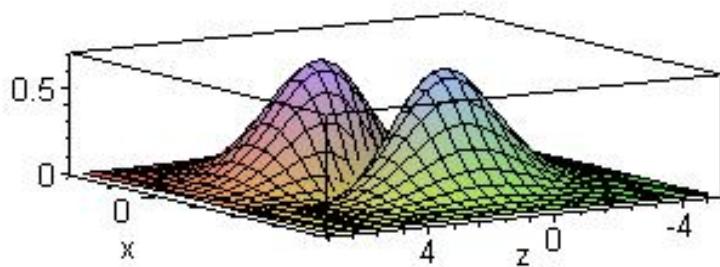


Рис. 2.40.- Рельеф модуля вихря  $R$  над плоскостью  $XZ$  при  $t=0$ .

На рис. 2.38 – 2.40 показан рельеф модуля вихря над плоскостью  $XZ$  в моменты  $t = 0, 1, 3/2$  ( $y=0$ ).

Начальный двугорбый рельеф описывает пару противоположно закрученных вихрей, зеркально антисимметричных относительно  $OZ$ . Затем они, расплываясь, ползут в сторону положительных  $X$  и  $Z$ , причём ось симметрии поворачивается по часовой стрелке, приближаясь к  $OX$ .

Совокупность рисунков 2.33 – 2.40 описывает эволюцию модуля объёмного вихря со временем. Отличие этого случая от предыдущего (см. п. 2.5) видно из сравнения графиков.

## **2.7. Учёт начального состояния в задаче об эволюции вихревых образований в нестационарных газообразных системах**

Выше был рассмотрен и решён ряд задач, посвящённых эволюции вихревых движений в нестационарных газообразных системах.

Поскольку в исходных положениях используются представления Гиббса, т. е., рассматривается ансамбль всевозможных вероятных состояний системы, полученные формулы явно не содержат информации о начальном состоянии её. Для выявления влияния начального состояния на дальнейшую эволюцию вихревых образований применяется метод, основанный на представлениях, изложенных в

[63] (см. также [49, 59, 63, 64, 65, 76]). Именно, предполагаем, что обобщённые координаты Гиббса можно представить в виде

$$q_i = q_{i0} + q_{it} \quad (2.62)$$

Представление (2.62) позволяет рассматривать ансамбль состояний Гиббса, как совместное распределение по множеству начальных значений  $\{q_{i0}\}$  и по множеству мгновенных (текущих) значений  $\{q_{it}\}$  фазовых переменных. Его интегрирование по одному из этих множеств (в соответствующих пределах) даёт распределение по другому множеству. При этом возникает дополнительный нормировочный множитель, определяемый из условия нормировки повторного интегрирования по обоим множествам.

Для рассматриваемых задач это эквивалентно представлению

$$x_\alpha = x_{\alpha 0} + x_{\alpha t}, \quad (2.63)$$

где  $x_{\alpha 0}$  – начальные координаты точки в физическом пространстве ( $\alpha=1,2,3$ ),  $x_{\alpha t}$  – координаты текущего состояния или текущими координатами.

Применим эти представления для модели расширения в вакуум начально-однородного неподвижного сферического источника конечного радиуса  $R$  в однородном потенциальном поле, сохраняя прочие предположения, принятые в п. 2.2. Исходя из формул компонент вихря, полученных в п. 2.2 при неопределённых начальных условиях, и представления (2.63), для этой модели были получены выражения для компонент вихря в текущем состоянии [66]:

$$R_x = -\frac{3Nft\sqrt{\beta}y}{4\pi^{3/2}R^3r_t} \cdot \left\{ e^{-\beta(R+r_t)^2} - e^{-\beta(R-r_t)^2} + r_t\sqrt{\beta\pi} \left[ \Phi(\sqrt{\beta}(R+r_t)) + \Phi(\sqrt{\beta}(R-r_t)) \right] \right\} \quad (2.64)$$

$$R_y = \frac{3Nft\sqrt{\beta}x}{4\pi^{3/2}R^3r_t} \cdot \left\{ e^{-\beta(R+r_t)^2} - e^{-\beta(R-r_t)^2} + r_t\sqrt{\beta\pi} \left[ \Phi(\sqrt{\beta}(R+r_t)) + \Phi(\sqrt{\beta}(R-r_t)) \right] \right\} \quad (2.65)$$

$$R_z = 0 \quad (2.66)$$

Здесь и далее:  $x, y, z$  – текущие координаты,  $R$  – радиус источника,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r_t = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ft^2 / 2m)^2}; \quad (2.67)$$

прочие обозначения – те же, что и выше. OZ выбрано по направлению поля. Дополнительная нормировка приводит к появлению в формулах делителя – начального объёма источника  $4\pi R^3/3$ .

Проекции  $R_x$  и  $R_y$  меняют знак при отражении координат  $x$ ,  $y$ . В отсутствии поля все компоненты вихря равны нулю, свободное расширение от сферического источника не приводит к образованию вихрей. В начальный момент вихревого движения нет. В асимптотике вихри аннулируются. При конечных  $r$  и  $t$  имеем движущиеся от оси вихря экстремумы.

Полученные выражения (2.64) и (2.65), в отличие от выражений для неопределённых начальных условий, явно содержат радиус источника  $R$ . В случае  $R = 0$  имеем вихри, создаваемые малым (теоретически – точечным) источником, т. е. имеем переход к случаю п. 2. Например, для  $R_x$ :

$$R_{x0} = -\frac{2\beta^{\left(\frac{5}{2}\right)} Nfty \cdot e^{\left[-\beta\left(r^2 + \left(z - \frac{ft^2}{2}\right)^2\right]\right]}}{\pi^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \quad (2.68)$$

Или, выразив через текущую плотность  $\rho$ , запишем

$$R_{x0} = -\frac{2\beta fty \cdot \rho}{m} \quad (2.69)$$

Это выражение как раз совпадает с формулой вихря для неопределённых начальных условий (см. (2.20)).

Разложение функций (2.64) и (2.65) в ряды по степеням малого  $R$  даёт неисчезающее нулевое приближение в виде (2.68) только в четвёртом порядке разложения. Первое приближение (в шестом порядке разложения) (для  $R_x$ ):

$$R_x = -\frac{2Nfty\beta^{\left(\frac{5}{2}\right)} y \cdot e^{\left(-\beta r_t^2\right)}}{\pi^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{2}{5} \frac{Nfty\beta^{\left(\frac{7}{2}\right)} y e^{\left(-\beta r_t^2\right)} \left(-3 + 2\beta r_t^2\right) R^2}{\pi^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \quad (2.70)$$

Отсюда видно, что фактически безразмерным малым параметром является величина

$$\beta R^2 = \frac{bwR^2}{1 + ct / am + bt^2 / am^2}. \quad (2.71)$$

Эта величина быстро убывает со временем. Поскольку константа  $a$  (см.[49])

$$a = 1 / 2mw\theta,$$

где  $\theta$  - модуль распределения, то при больших временах имеем:

$$\beta R^2 \approx mR^2 / 2\theta t^2.$$

Т. о., при больших  $t$ , когда квадратичный член в (2.71) преобладает, указанный параметр мал, и можно пользоваться формулами для малого источника.

Возникновение и эволюция  $X$ -компоненты вихря представлены на рис. 2.41 – 2.44. Как и ранее, для всех графиков принято  $[a=1, b=1, c=1, m=1, f=1]$ . Новый параметр  $R$  выбран условно равным единице. Для лучшего масштабирования принято  $N=1000$ .

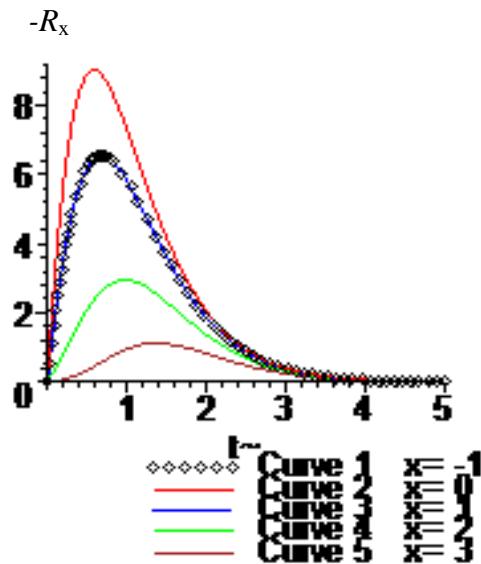


Рис. 2.41.- Зависимость  $R_x$  от времени при разных значениях  $x$ . [ $y = -1, z = 1$ ]

На рис. 2.42 – 2.44 даны профили  $-R_x$  по всем трём осям (профили  $R_y$  аналогичны). Для определённости значения прочих координат на каждом графике при-

няты равными единице. Представляет интерес появление и дальнейшая эволюция пары противоположно направленных вихрей в положительной и отрицательно полуплоскости ( $y>0$  и  $y<0$ ).

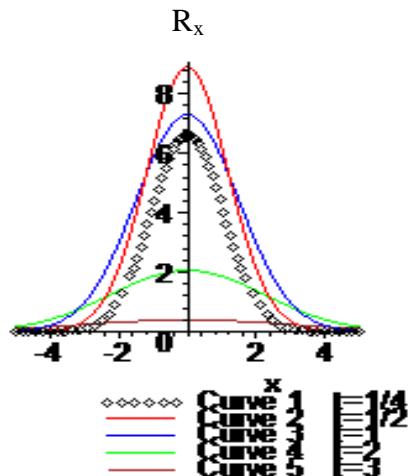


Рис.2. 42.- Зависимость  $R_x$  от  $x$  при  $y=1$ ,  $z=1$  в последовательные моменты времени.

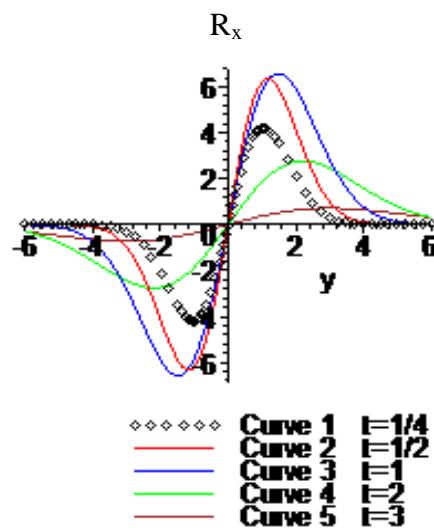


Рис. 2.43.- Зависимость  $R_x$  от  $y$  ( $x=1$ ,  $z=1$ ) в последовательные моменты времени.

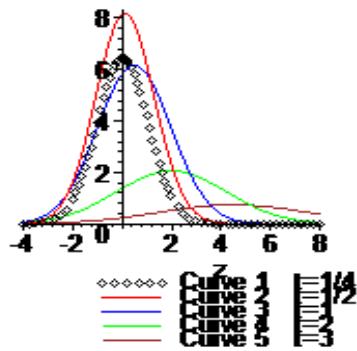


Рис.2. 44.- Зависимость  $R_x$  от  $z$  при  $x=1, y=1$  в последовательные моменты времени.

Качественно поведение этих графиков близко к поведению соответствующих выражений в п. 2.2. Аналогичные графики получим для  $R_y$ .

Для выявления зависимости вихря от параметра  $R$  приведены в сравнении графики для  $R=0,5$  и  $R=5$  (рис. 2.45). При этом число  $N$  принято пропорциональным объёму источника (при постоянной плотности), и условно выбрано равным соответственно 10 и 1000. Приводится  $z$ -профиль X-проекции вихря.

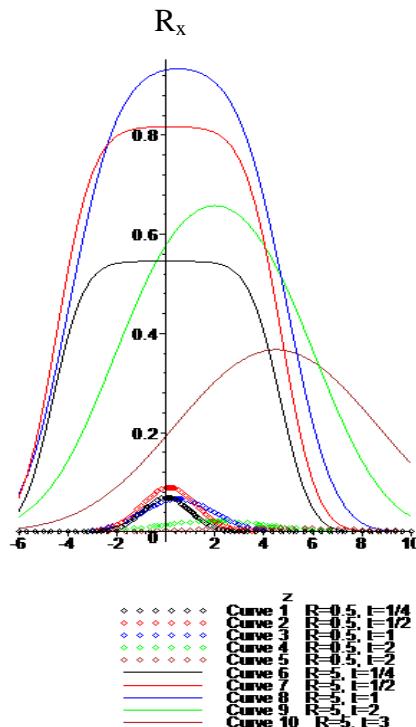


Рис. 2.45.- Профили X-проекции вихря по  $z$  для  $R=0,5$  (пунктир) и  $R=5$  (линии).

Т. о., для источника больших размеров и массы в начальной фазе эволюции вихревое движение сосредоточено в концентричной области с размерами порядка размеров источника и нарастает. В дальнейшем происходит сдвиг вихря в направлении поля и его расплывание. На рис. 2.46 представлен рельеф  $R_x$  над плоскостью  $XY$  (при  $z=0$ ) соответствующий случаю на рис. 2.42 – 2.44.

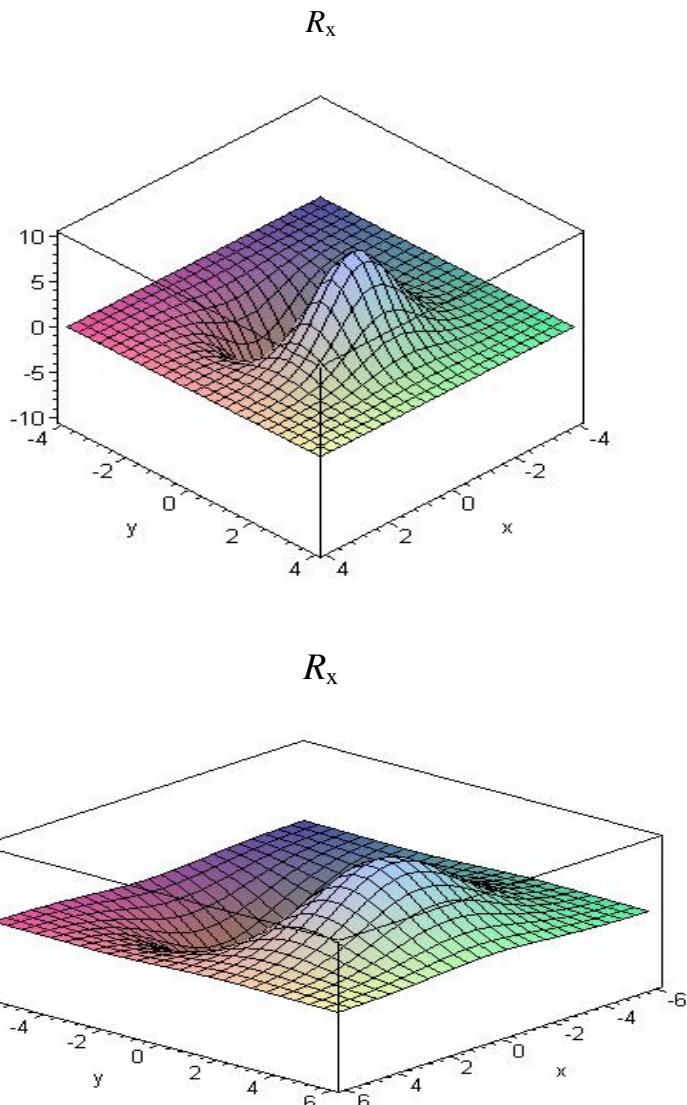


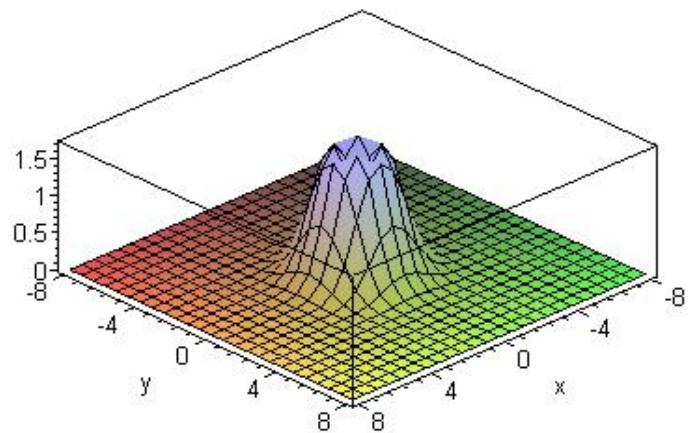
Рис. 2.46.- Рельеф  $R_x$  над плоскостью  $XY$  при  $t=1/4, 2$ .

На рис. 2.47 представлен типичный рельеф над плоскостью  $XY$  модуля вихря

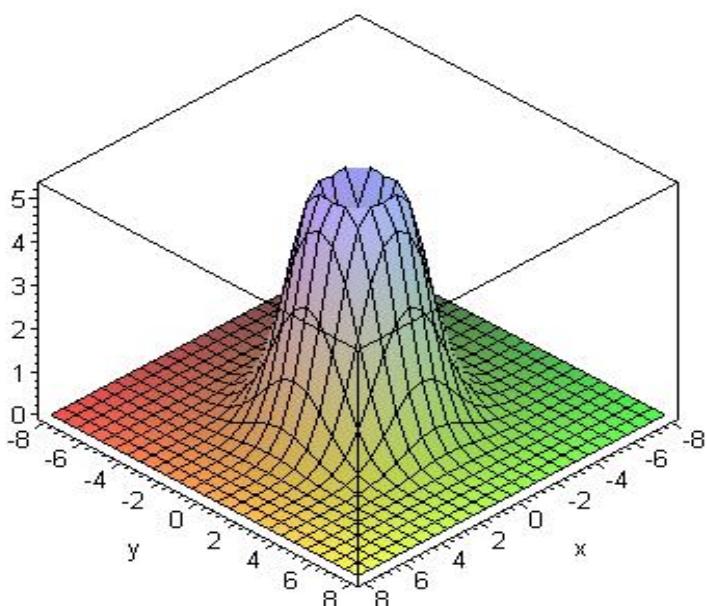
$$|\text{rot } \mathbf{j}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2.72)$$

Мы видим образование и эволюцию характерного кратерообразного рельефа.

$|\text{rot } \mathbf{j}|$



$|\text{rot } \mathbf{j}|$



$|\text{rot } \mathbf{j}|$

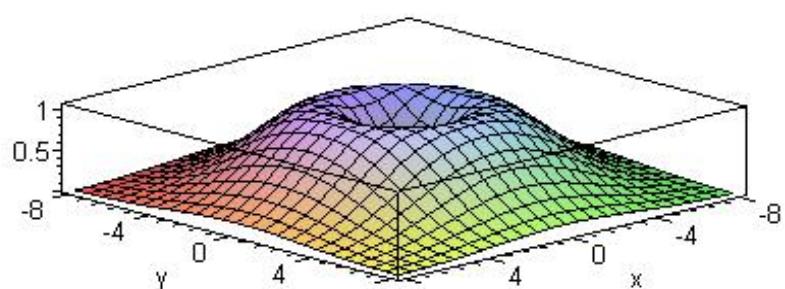


Рис. 2.47.- Рельеф модуля вихря над плоскостью XY при  $t=1/4, 1, 3$  (сверху вниз)

## **Глава 3. Распределение момента импульса и момента силы в нестационарных газообразных средах**

### **3.1. Распределение момента силы в нестационарном газообразном облаке, находящемся в поле потенциальных сил**

В связи с выявленным в гл. 2 распределением вихрей возникает задача выявления и микроскопического описания характеристик вращательного движения неоднородной газообразной среды. Такая среда описывается кинетической теорией на основе статистикомеханической модели системы молекул или дисперсных частиц. В данном параграфе ставится задача нахождения распределения плотности момента силы в неоднородной газоподобной среде.

Рассмотрим эту задачу на примере модели облака частиц, расширяющегося из неподвижного малого источника в однородном внешнем поле (например, гравитационном). При отсутствии внешнего поля расширение облака сферически симметрично, эта задача была рассмотрена в [49]. Очевидно, при наличии поля эта сферическая симметрия нарушается и возникает анизотропия задачи относительно направления поля (далее направление действующей на все частицы силы выбрано по оси Z). Когда облако находится в однородном изотропном пространстве и в начальный момент времени не вращается в целом, а внешнее потенциальное поле – однородное, очевидно, что суммарный момент сил действующих на облако равен нулю в начальный момент и сохраняет это значение при любом  $t > 0$ . Однако в общем случае на любую частицу облака действует внешняя сила, и момент этой силы не равен нулю. В таком случае существует распределение плотности момента силы в объеме облака, причем эта плотность знакопеременна, так что интеграл от нее по всему объему равен нулю.

Для рассмотренной в гл. 2 модели облака, исходящего из неподвижного малого источника была получена [49] нестационарная функция распределения системы в виде:

$$F_N = Z^{-1} \cdot \exp \left\{ -k_1 \cdot p_{i\alpha} p_{i\alpha} + k_3 \cdot p_{i\alpha} q_{i\alpha} - b \cdot q_{i\alpha} q_{i\alpha} - k_1 \cdot p_{i3} p_{i3} - k_2 \cdot p_{i3} + k_3 \cdot p_{i3} q_{i3} - k_4 \cdot q_{i3} - b \cdot q_{i3} q_{i3} - k_6 \right\} \quad (3.1)$$

где  $i = 1 \dots N$ ,  $\alpha = 1, 2$  и подразумевается сумма по всем значениям повторяющихся индексов, как это принято в тензорном исчислении. Значение  $\alpha=3$  закреплено для  $z$ -проекций фазовых переменных.  $Z$  – статистический интеграл,  $p$  и  $q$  – обобщенные координаты и импульсы,  $b$  - константа задачи, определяемая из дополнительных условий.

Для однородных частиц коэффициенты  $k_1 \dots k_6$  одни и те же для любого  $i$ , причём:

$$k_1 = au; \quad k_3 = c + \frac{2bt}{m}, \quad (3.2)$$

как в [49]. Т. к., здесь принят неподвижный источник, то выражения других коэффициентов упрощаются (сравнительно с [49]) и имеют вид:

$$k_2 = -2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2}; \quad k_4 = cft + \frac{bft^2}{m}; \quad k_6 = af^2t^2 + \frac{cf^2t^3}{2m} + \frac{bf^2t^4}{4m^2}. \quad (3.3)$$

При этом:

$$Z = \left( \pi / \sqrt{abw} \right)^{3N}, \quad (3.4)$$

прочие обозначения – как выше во всей работе.

Функция (3.1) была использована в [49,52] для получения выражений плотности  $\rho$ , плотности потока вещества  $\mathbf{j}$  и вихря этого вектора  $\text{rot } \mathbf{j}$  в рассматриваемой модели.

По аналогии с другими динамическими величинами, вводимыми в кинетической теории [48], для нахождения плотности момента силы предложен оператор плотности момента силы в виде:

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N M_{\alpha\beta i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \prod_{\gamma=1}^3 \delta(q_{i\gamma} - x_\gamma). \quad (3.5)$$

Здесь, как и выше,  $x_\alpha$  - координаты точки в физическом пространстве, причём индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения 1, 2, 3. При этом плотность момента силы согласно определению кинетической теории выражается антисимметричным тензором 2-го ранга:

$$\mu_{\alpha\beta} = N \int_{\Gamma} d\Gamma \cdot F_N \cdot (q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \prod_{\gamma=1}^3 \delta(q_{i\gamma} - x_\gamma), \quad (3.6)$$

где  $f_{i\alpha}$  - проекции вектора силы, действующей на каждую  $i$ -ю частицу. Ось  $z$  направлена вдоль поля, так что ненулевая только проекция  $f_{i3}$ . Для одинаковых частиц в однородном поле при любом  $i$  имеем  $f_{i3} = f_3$ . Три независимых недиагональных компоненты выражения (3.6) образуют псевдовектор плотности момента силы.

Из (3.6), используя, найденное выражение  $F_N$  (3.1), получим компоненты плотности момента силы [71].

$$\mu_{12} = 0; \quad \mu_{13} = \frac{x_1 f_3 \rho}{2m}; \quad \mu_{23} = \frac{x_2 f_3 \rho}{2m}, \quad (3.7)$$

где плотность

$$\rho = N m \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\beta \left[ r^2 + \left( z - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.8)$$

Здесь обозначено:  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x=x_1$ ,  $y=x_2$ ,  $z=x_3$ .

Т. о., найдены компоненты псевдовектора плотности момента силы в квазинепрерывной среде, эффективно представляющей статистическую систему по представлениям кинетической теории. Этот момент создаётся совокупностью действий внешнего поля (например, гравитационного) на множество движущихся частиц нестационарной, пространственно неоднородной системы. Для стационарной, пространственно однородной системы это явление теоретически не обнару-

живается. Ненулевые компоненты плотности момента силы лежат на плоскости, ортогональной внешнему полю.

Исследование найденных формул показывает, что: 1) полученные функции нечетные и меняют знак при  $x_2, x_1 = 0$ ; 2) они удовлетворяют асимптотическим условиям обращения в нуль при  $x_\alpha \rightarrow \pm\infty$  и при  $t \rightarrow \infty$ ; 3) они пропорциональны плотности среды; 4) они имеют экстремумы при конечных  $x_1, x_2$ , причем эти экстремумы удаляются со временем от нуля, одновременно понижаясь. Общей закономерностью является «расползание» плотности момента силы по пространству при одновременном его асимптотическом убывании со временем к нулю. Очевидно, на оси  $z$  (при  $x=0$  и  $y=0$ ) плотность момента силы всегда равна 0. Свойства функций  $\mu_{13}$  и  $\mu_{23}$  таковы, что интегралы от них по неограниченному объему в симметричных пределах равны нулю вследствие нечетности. Т. о., полный момент силы равен нулю при ненулевой (знакопеременной) локальной плотности его.

Для некоторых задач имеет значение модуль псевдовектора плотности момента силы, находимый из компонент (3.7), который приводится к виду:

$$\mu = \frac{f_3 r \rho}{2m} . \quad (3.9)$$

Для этой неотрицательной функции имеется радиальный максимум, который движется по закону

$$r_m = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}\right)}}{\sqrt{2bw}} ,$$

(при любом конечном  $z$ ) и максимум по оси  $z$ , движущийся (при  $r \neq 0$ ) по закону

$$z_m = ft^2 / 2m$$

Примечательно, что движение  $r_m$  зависит от коэффициента  $a$ , который в подобных задачах обратно пропорционален температуре [49], а именно:

$$a = 1 / 2m\theta ,$$

где  $\theta$  - модуль распределения по Гиббсу.

«Расползание» распределения плотности момента силы асимптотически описывается формулой

$$r_m \approx \sqrt{\frac{\theta}{mw} t}$$

и определяется тепловой скоростью частиц среды. «Чистая» гидродинамика не объясняет это расположение.

Поведение найденных компонент тензора плотности момента силы и модуля плотности момента силы иллюстрируется представленными ниже графиками.

На рис. 3.1 представлены трехмерные графики (рельеф) компоненты  $\mu_{23}$ , т. е.,  $x$ -проекции плотности момента силы, как функции радиальной переменной  $r$  и полярного угла  $\alpha$  (в плоскости  $XY$ ) при  $z = 0$  в последовательные моменты времени.

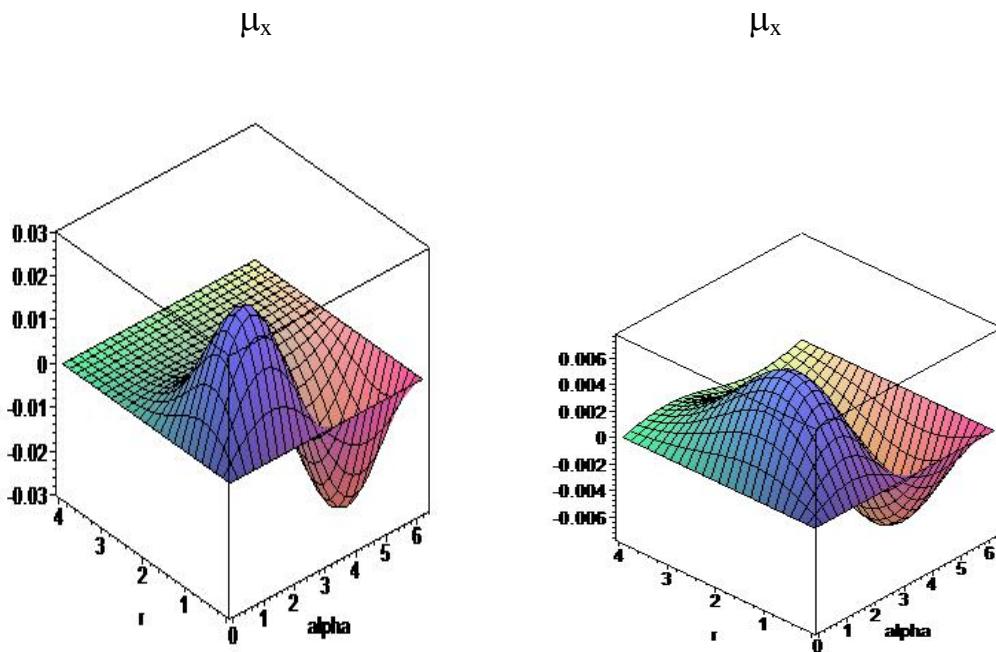


Рис. 3.1.- Компонента плотности момента силы  $\mu_{23}$ , как функция  $r, \alpha$  при  $z=0$  для  $t=0; 1$ .

На графиках видно, как с течением времени максимум функции понижается и смещается в пространстве в область больших  $r$ . Так же видны области с противоположным знаком функции, причём знак меняется при  $\alpha=\pi$ . В двух полупространствах имеем вихревые движения, направленные в разные стороны, что соот-

ветствует указанному выше обращению в нуль интегрального значения момента силы. Поведение компоненты  $\mu_{13}$  вполне аналогично.

На рис. 3.2 представлены трехмерные графики (рельеф) модуля плотности момента силы  $\mu$ , как функции декартовых координат в плоскости  $XY$ , при  $z = 0$  в разные моменты времени.

Трехмерные графики модуля плотности момента силы  $\mu$  имеют характерный «кратерообразный» вид. Из рисунков видно, что они имеют осесимметричную структуру с нулевым минимумом на оси  $z$  и, с течением времени, расплюются при понижении максимума.

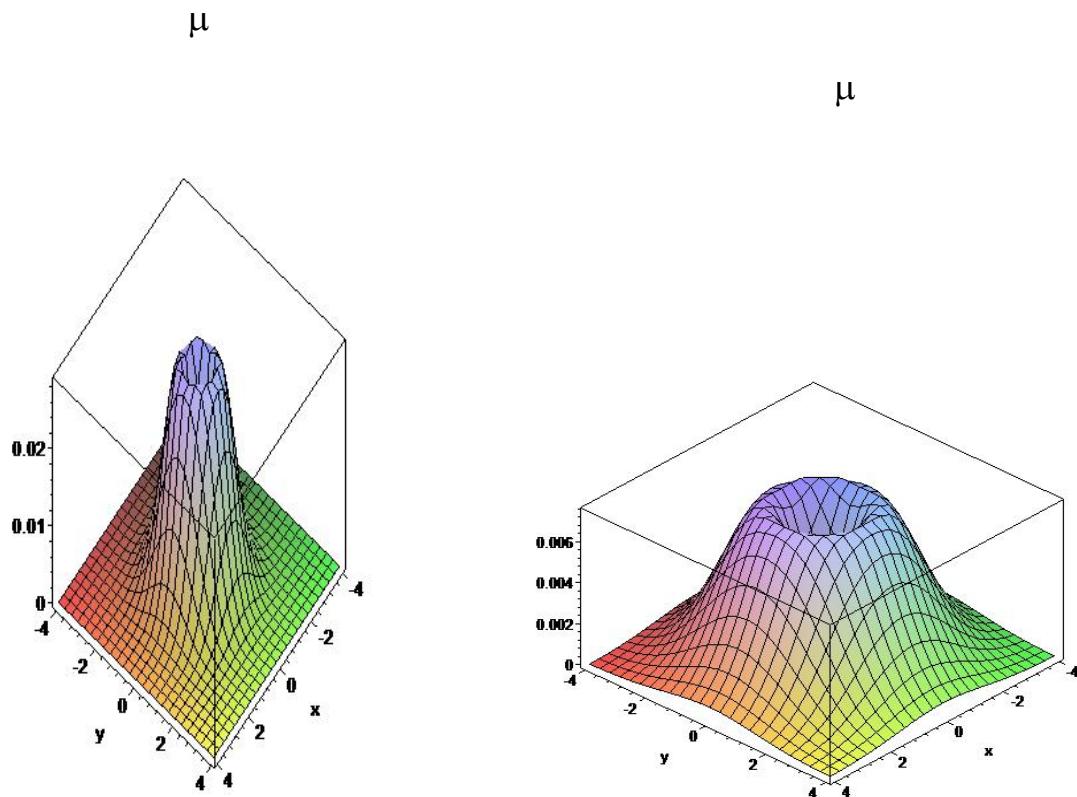


Рис. 3.2.- Модуль плотности момента силы  $\mu$ , как функция  $x, y$  при  $z=0$  для  $t=0; 1$ .

Итак, получено распределение плотности момента силы в неоднородной газообразной среде. Эта величина знакопеременна и зависит от времени. Она определяется нестационарной плотностью среды, силой действия внешнего поля и массой частиц. В ходе эволюции облака поле плотности момента силы изменяется по сложным пространственно-временным закономерностям и асимптотически со-

временем обращается в нуль, что вызвано рассеянием облака в пространстве. При этом суммарный момент сил, действующих на облако в целом, остается равным нулю. Это согласуется с законом сохранения момента импульса облака, который также остается равным нулю, если облако не было закрученено изначально.

### 3.2. Распределение момента импульса в нестационарном газообразном облаке, находящемся в поле потенциальных сил

Теперь поставим задачу нахождения распределения момента импульса в неоднородной газообразной среде для той же модели нестационарного облака частиц, расширяющегося из неподвижного малого источника в однородном внешнем поле (например, гравитационном). Для такой модели нестационарная функция распределения системы имеет использованный в предыдущем параграфе вид (3.1). При тех же обозначениях сохраняют свои значения коэффициенты (3.2), (3.3) и (3.4).

В кинетической теории для нахождения плотности момента импульса вводится оператор плотности момента импульса в виде:

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N L_{i\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N (q_{i\alpha} p_{i\beta} - q_{i\beta} p_{i\alpha}) \cdot \prod_{\gamma=1}^3 \delta(q_{i\gamma} - x_\gamma). \quad (3.10)$$

Это – антисимметричный тензор, причём значки  $\alpha, \beta$  принимают значения 1, 2, 3. При этом плотность момента импульса выражается антисимметричным тензором 2-го ранга:

$$\lambda_{\alpha\beta} = N \int_{\Gamma} d\Gamma \cdot F_N \cdot (q_{i\alpha} p_{i\beta} - q_{i\beta} p_{i\alpha}) \cdot \prod_{\gamma=1}^3 \delta(q_{i\gamma} - x_\gamma) \quad (3.11)$$

(с теми же обозначениями, что и выше). О $Z$  направлена вдоль поля. Три независимые недиагональные компоненты выражения (3.11) образуют псевдовектор плотности момента импульса. Подставив в (3.11) функцию (3.1) и выполняя интегрирование, находим [72]:

$$\lambda_{12} = 0; \quad \lambda_{13} = \frac{k_2 x \rho}{2 a m t}; \quad \lambda_{23} = -\frac{k_2 y \rho}{2 a m t} \quad (3.12)$$

где  $\rho$  определено в (3.8), а зависящие от времени множитель  $k_2$  определён в (3.3). Т. о., псевдовектор плотности момента импульса, как и плотность момента силы, определяемая выражениями (3.7), имеет две ненулевых компоненты и лежит в плоскости, ортогональной полю. Проекции плотности момента импульса (3.12) имеют ту же пространственную структуру, что и проекции вихря в данной задаче ((2.20), (2.21)), отличаясь лишь множителем, зависящим от времени. Поскольку  $\rho$  пропорционально  $t^2$ , а  $k_2$  пропорционально  $t^3$ , множители при  $\rho$  растут со временем, но ввиду убывания плотности со временем, проекции плотности момента импульса со временем убывают.

На рис. 3.3 – 3.5 приведены профили компоненты  $\lambda_{13}$  по всем координатным осям в выбранные моменты времени (для  $\lambda_{23}$  получим аналогичную картину, отличающуюся знаком).

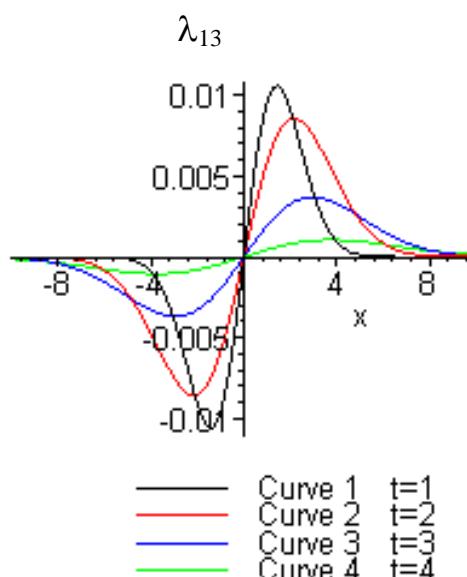


Рис. 3.3.- Профиль  $\lambda_{13}(x)$  в последовательные моменты времени ( $y=1, z=1$ ).

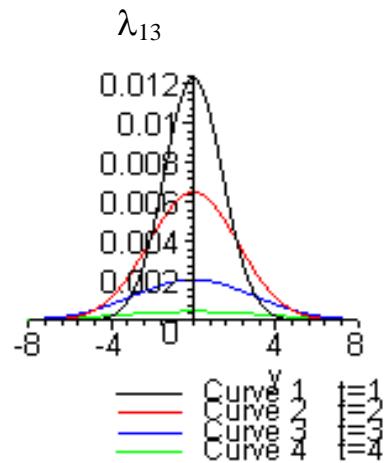


Рис. 3.4.- Профиль  $\lambda_{13}(y)$  в последовательные моменты времени ( $x=1, z=1$ ).

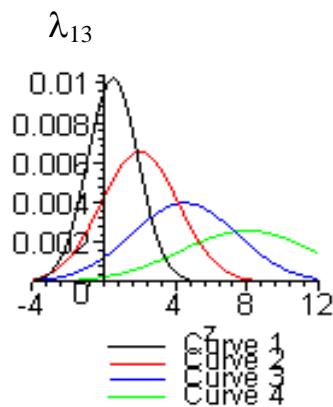


Рис. 3.5.- Профиль  $\lambda_{13}(z)$  в последовательные моменты времени ( $y=1, x=1$ ).

Основные закономерности эволюции распределения плотности момента импульса те же, что выявлены для проекций вихря (см. Гл. II, рис. 2.1 – 2.3). Различие в графиках объясняется тем, что здесь представлена  $\lambda_{13} = -L_y$  отличающаяся знаком от (2.20). Второе отличие происходит из отмеченной выше более слабого убывания со временем плотности момента импульса.

Модуль плотности момента импульса, находимый из компонент (3.12):

$$L = -\frac{k_2 \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \rho}{2am_i}. \quad (3.13)$$

Эволюция модуля плотности момента импульса иллюстрируется представленными ниже рисунками (3.6 –3. 8).

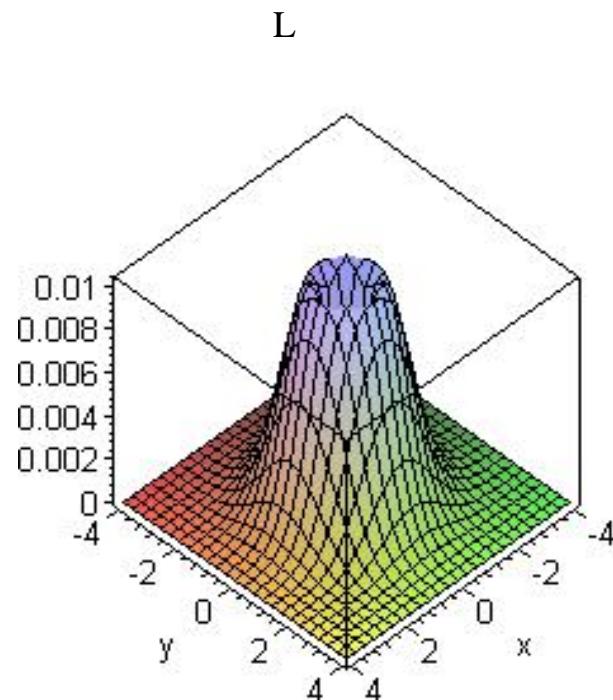


Рис. 3.6. -Рельеф модуля плотности момента импульса над плоскостью XY (при  $t=1/2$ )

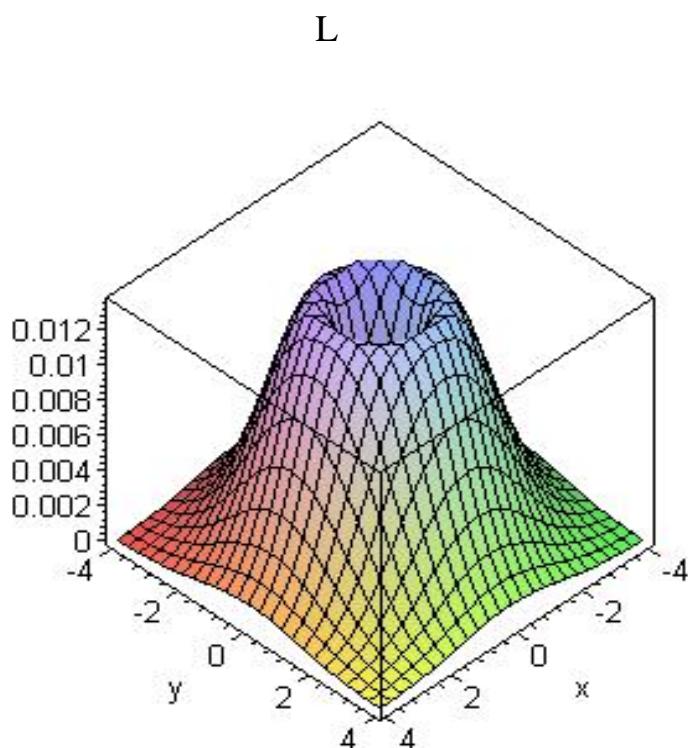


Рис. 3.7.- Рельеф модуля плотности момента импульса над плоскостью XY (при  $t=1$ )

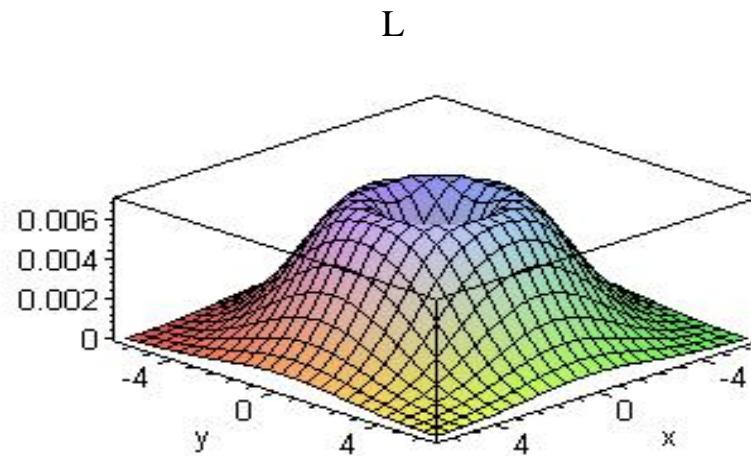


Рис. 3.8.- Рельеф модуля плотности момента импульса над плоскостью XY (при  $t=2$ )

На рисунках даны трехмерные графики модуля плотности момента импульса  $L$ , как функции декартовых координат  $x, y$  (при  $z=0$ ) в моменты  $t = 1/2, 1, 2$ . Графики имеют характерный «кратерообразный» вид, как и для модуля вихря (см. рис. 2.9 – 2.11 в Гл. II). Из рисунков видно, что плотность момента импульса имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на OZ и, с течением времени максимум её вначале растет, а затем понижается и распределение расплывается. Полученные результаты описывают эволюцию вращательного движения в газоподобном облаке, приводящую к возникновению, росту и затуханию вихрей, описанному выше.

### **3.3. Взаимосвязь плотности момента силы, плотности момента импульса и создаваемого ими вихря**

Рассмотрим взаимосвязь момента силы и момента импульса в неоднородной газоподобной среде. Сравнив компоненты (3.7) и (3.12), находим (для одноимённых компонент плотности момента импульса и плотности момента силы) [73]:

$$\lambda = \frac{2 \cdot (1 + 3ct / 4am + bt^2 / 2am^2) t \cdot \mu}{(1 + ct / am + bt^2 / am^2)} ; \quad (3.14)$$

Отсюда следует, что указанные компоненты имеют одинаковую зависимость от координат, но момент импульса убывает со временем медленнее ( $\sim 1/t^2$ ), чем момент силы, который убывает пропорционально плотности (которая убывает  $\sim 1/t^3$ ),.

Проекции плотности момента импульса пропорциональны проекциям плотности потока массы на ОХ и ОY, полученным в [52], с точностью до множителя, зависящего от времени.

Проекции вихря плотности потока массы, как показано в гл. II:

$$\text{rot}_x \mathbf{j} = -\frac{2\beta y \cdot ft}{m} \rho; \quad \text{rot}_y \mathbf{j} = \frac{2\beta x \cdot ft}{m} \rho; \quad \text{rot}_z \mathbf{j} = 0 \quad (3.15)$$

Сравнивая с ними формулы (3.12), видим, что выражения (3.15) пропорциональны компонентам плотности момента импульса, причём множитель пропорциональности есть функция времени

$$\frac{2bw}{1 + 3ct / am + bt^2 / 2am^2} . \quad (3.16)$$

Аналогичное соотношение выполняется между компонентами вихря плотности потока массы и компонентам плотности момента силы. В этом случае:

$$R_x = \frac{4bwt}{u} \mu_x . \quad (3.17)$$

Т. о., обнаруживается связь вихря плотности потока массы, плотности момента силы и плотности момента импульса.

Очевидно, в данной модели выполняется закон сохранения момента импульса в интегральной форме. Выполнение этого закона проистекает формально из нечётной зависимости от координат проекций момента импульса и момента силы, вследствие чего интегралы от них по объёму равны нулю. Т. о., вращательное движение среды является локальным, и в полуобъёмах её возникают противоположно направленные локальные вихри. Эти вихри возникают вследствие наличия внешнего поля (или начального движения источника), достигают наибольшей ин-

тенсивности и, затем, угасают ввиду убывания плотности неограниченного газообразного облака.

## Заключение

Полученные результаты представляют материал для микроскопического обоснования к описанию вихревых движений на основе представлений Гиббса. Предложен вариант неравновесной микроскопической теории таких движений в нестационарных газообразных облаках, образованных быстрым диспергированием или испарением исходного образца. Рассмотрены неограниченно расширяющиеся облака, исходящие из малых источников и источников конечных размеров. Для описания вихревого движения предложено использовать вихревое поле, создаваемое вектором потока плотности массы. Полученные формулы используются для кинетического описания вихревого движения в нестационарных облаках газа или дисперсных частиц в представлении квазинепрерывной среды. Физической причиной возникновения вихревых движений, как следует из изложенного материала, является перераспределение энергии частиц, получаемой от внешнего поля или от начального инерциального движения системы, хаотическим движением в системе многих частиц, находящейся при конечной температуре. Полями, производящими данный эффект, могут быть однородное гравитационное поле, поле сил Архимеда, неоднородное электрическое поле, действующее на дипольные частицы и другие. Хотя причиной возникновения и развития вихря является поле или направленное массовое движение среды, он возникает только после образования газообразного облака с неоднородной и переменной плотностью. В этом смысле вихревое движение является свойством неоднородной и нестационарной сплошной среды, эффективно описывающей систему многих частиц. Предлагаемый подход позволяет описывать для ряда моделей возникновение вихревого движения, исходя из микроскопических представлений. Применимость теории ограничена выбранными моделями, причём, если модель газообразного облака применима в начальный момент, она применима и во все последующие моменты. В рамках

этих моделей все результаты получены в аналитическом виде и являются строгими. Описывается эволюция вихрей, включая их возникновение, распространение и затухание.

Предлагаемое описание вихревых явлений согласуется с опытными данными. Подобные явления часто наблюдаются в природе в восходящих и нисходящих потоках воздуха, где «маркерами» являются снежинки, пылинки, частицы дыма, семена растений и прочее.

Возможны приложения полученных результатов к описанию вихревых движений в газообразных облаках, возникающих при выхлопе в вакуум, при выбросе облаков газа и пыли в атмосферу, при быстром испарении капель и др.

Возможно также приложение аналогичного подхода к газодисперсным средам, что может быть применено к явлению смерчей. Установлена зависимость интенсивности вихрей и временных масштабов их эволюции от массы частиц. Для дисперсных частиц, массы которых много больше масс молекул, интенсивности вихрей и временные масштабы их эволюции могут быть на несколько порядков больше, чем в молекулярных газах, что подтверждается опытными данными.

Отметим, что мы не использовали уравнение Больцмана [39], поэтому некоторые термины, употребляемые в кинетической теории, основанной на этом уравнении, не могут быть использованы, и их надо применять с осторожностью.

Также необходимо осторожность при использовании таких гидродинамических характеристик движения, как число Рейнольдса и др., поскольку в данной теории, вследствие переменной плотности среды и зависимости её состояния от времени, значения этих чисел являются функциями координат и времени. Уравнения динамики сплошных сред для получения результатов не используются.

Достоверность результатов обеспечивается заложенными в теорию фундаментальными законами сохранения, применением общепризнанных уравнений и использованием математических компьютерных программ высокого уровня, позволяющих получать строгие результаты в аналитическом виде. Основные результаты получены строго для принятых моделей, без привлечения численных методов

или разложений в ряды с ограничением первыми членами разложений. Результаты согласны с имеющимися представлениями и данными наблюдений.

### **Основные результаты работы**

На основе нестационарного уравнения Лиувилля и статистико-механических представлений Гиббса построена молекулярно-кинетическая теория вихревых движений неограниченно расширяющихся облаков нестационарного идеального газа, пригодная так же для разреженных облаков дисперсных частиц.

Для ряда моделей неограниченно расширяющегося газообразного облака получены строгие аналитические формулы, описывающие эволюцию вихревых движений (включая их возникновение и затухание) в терминах кинетической теории.

Теоретически показано, что вихревое движение может возникать вследствие действия потенциального силового поля или направленного массового движения среды.

Теоретически описывается на основе микроскопической теории известное из опыта возникновение связанных пар вихрей противоположной ориентации.

Теоретически объяснено наблюдаемое влияние направленного движения среды («бокового ветра») на возникновение и эволюцию компоненты вихря, ортогональной этому движению.

Получена формула, впервые учитывающая влияние начальных размеров сферического источника на эволюцию вихря создаваемого им газового облака.

Показано согласие полученных результатов с законом сохранения момента импульса в нестационарной газоподобной среде.

Показано, в согласии с опытом, что эволюция вихрей для систем дисперсных частиц замедляется с увеличением массы частицы на несколько порядков, по сравнению с молекулярными газами, а интенсивность таких вихрей на несколько порядков больше, чем в молекулярных газах.

Некоторые из перечисленных результатов ранее не были известны в аналитическом виде, или получались другими методами.

Применимость теории ограничена классом рассмотренных моделей, а именно, следующими предположениями:

- 1) рассматриваются газообразные облака с постоянным числом однородных частиц (незаряженных и неизлучающих);
- 2) облако не находится в контакте с другими телами;
- 3) расширение нестационарного облака неограниченно;
- 4) оно происходит при постоянных заданных условиях, в т. ч. в постоянных и однородных внешних полях;
- 5) рассматривается определённый класс начальных условий, когда облако в начальном состоянии уже максвеллизировано, но пространственно неоднородно.

## Список литературы

1. Алексеенко, С. В., Куйбин, П. А., Окулов, В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей/С. В. Алексеенко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
2. Вилля, Г. Теория вихрей/Г. Вилля. - Л. – М.: ОНТИ, 1936. 266 с
3. Гольдштик, М. А./М. А. Гольдштик. Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
4. Белоцерковский, О. М., Андрушенко, В. А., Шевелев, Ю. Д. Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере/О. М. Белоцерковский, В. А. Андрушенко, Ю. Д. Шевелев. Янус-К. 2000. 456 с.
5. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. Собрание сочинений. Т2, - Москва-Ленинград: государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.764 с.
6. Карман Теодор. Аэродинамика. Избранные темы в их историческом развитии. Ижевск: РХД, 2001.208с.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.1-2, 4 изд. — М., 1983.84с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд. — М., 1977.408с.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости, пер. с англ. — М., 1973.760с.
10. Наливкин Д.В., «Ураганы, бури, смерчи». –М: Наука, 1984.487с.
11. Чёрный Г. Г., «Газовая динамика», М: Наука, 1988.424с.
12. Белоцерковский С. М. Турублентность и вихревая аэродинамика. 2002.102с.
13. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы. УФН, 1995, N3, с.299 - 330.
14. Биркгоф Г. - Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М., 1963. 246с.
15. Валандер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Ленинград, 1978.296с.
16. Ламб Г. – Гидродинамика. М., Л., 1947.928с.

- 17.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Т.6. С.350-359.
- 18.Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. 736 с.
- 19.Меркулов В.И. Гидродинамика знакомая и незнакомая. М.: Наука, 1989. 135с.
- 20.Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. - М.: Наука, 1964.814с.
- 21.Фимин Н. Н., Чечеткин В. М./ Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика /Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015, №1, 35с.
- 22.Марков В. В., Сизых Г. Б./ Эволюция завихренности в жидкости и газе/ Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. №2. С. 8-15.
- 23.Сизых Г. Б./ Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости/ Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46. №3. С. 14-20.
24. Шиляев М. И., Шиляев А. М. Аэродинамика и тепломассообмен газодисперсных потоков. 2003. 272с.
- 25.Высикайло Ф. И. «Квазикуперовские» бициклоны. 3d турбулентные структуры с вращением и кумулятивными струями./Инженерная физика, № 7, 2013.С. 905-907.
- 26.Vun S., Naser J., Witt P. J.,Yang W.. Measurements and numerical predictions of gas vortices formed by single bubble eruptions in the free board of a fluidized bed. //Chemical Engineering Science, 2010. 65 p.
- 27.Политов В. С. Аналитическая модель смерча (торнадо). Челябинский государственный университет, г. Челябинск, 1998. С. 46-54.
28. Гиббс Д. В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: «Наука», 1982. 584 с.
- 29.Гуров К. П. Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
30. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. т. 1,405с., «Мир», М. 1978.
- 31.Силин В. П. Введение в кинетическую теорию//М.: Книжный дом «Либроком» – 2013.344с.

32. Политов В. С. Динамика закрученных течений идеального газа // Динамика пространственных и неравновесных течений.- Челябинск, Миасс, КБМ им. академика В. П. Макеева, 1992. – С.259-270.
33. Политов В. С., Головин А. Г. Некоторые вопросы газодинамики закрученных потоков//Некоторые вопросы исследований вихревого эффекта и его промышленное применение. Сборник – Куйбышев, 1974 – С. 197-200
34. Козлов В. В. Общая теория вихрей // Ижевск. Изд. дом Удмуртский университет, 1998.238с.
35. Гиршфельдер Дж. О., Кертисс К.Д., Берд Р.В. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 929 с.
36. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 400с.
37. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности, Доклады АН СССР, 44, С. 30 – 39, 1944.
38. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций, Пермь, 1998. 108 с.
39. Больцман Л. // Лекции по теории газов. М.: ГИТТЛ, 1953. 554 с.
40. Чепмен С., Каулинг Т. // Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
41. Яковлев В., «Вихревые газовые образования», <http://logicphysic.narod.ru>, 2015.
42. Голов А. Н., Зудина М. Н. Статистическая теория вихревых движений в нестационарных газоподобных системах// ВИНТИ № 315В2014, 26с., 2014.
43. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л. 1969. 428 с.
44. Williams M M R, Loyalka S K Aerosol Science: Theory and Practice (New York: Pergamon Press, 1991). PP. 93-96
45. Ивлев Л.С., Довгалюк Ю.А. "Физика атмосферных аэрозольных систем" С.-Петербург, НИИХ СПбГУ, 1999. 258 с.
46. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М.: «Мир», 1964. 314 с.

47. Боголюбов Н. Н./Проблемы динамической теории в статистической физике. М: ГТТИ, 1946. 290с
- 48.Гуров К. П. Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
- 49.Яламов Ю. И., Голов А. Н. «Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем»/ изд. МГОУ. 2011. 230 с.
- 50.Голов А.Н., Харитонов А.П. Эволюция плоского газоподобного облака в потенциальном поле. ВИНИТИ. 2008, 21 с. № 621 – В2008.
51. Голов А. Н., Харитонов А. П. Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле. //Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №3–4, 2008, С. 12 – 21.
- 52.Голов, А. Н., Зудина, М. Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле/ А. Н. Голов, М. Н. Зудина//Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», 2012. № 1, С. 39 – 43.
53. Яламов Ю. И., Голов А. Н. Статистикомеханические методы в теории неравновесных молекулярных и дисперсных систем. М.: МПУ, 1992. ВИНИТИ, №2423-В92, 280 с.
54. Яламов Ю. И., Голов А. Н. Удлинённое уравнение Лиувилля – Гиббса и интегралы однородного лиувиллиана. // «Избранные вопросы теоретической и математической физики», М., МПУ, 1986. ВИНИТИ, № 5322-В86, С. 147 – 154.
55. Де Гроот С. Р. и Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: «Мир», 1964. 456с.
56. Голов А. Н., Константиновский А. В. Статистикомеханическое решение задачи о свободном расширении системы невзаимодействующих частиц. // «Современные проблемы физики аэродисперсных систем», М.: МПУ, 1991. ВИНИТИ, №4900-В91, С.95-108.
57. Голов А. Н., Константиновский А. В. Статистическая газодинамика и термодинамика свободно расширяющейся неравновесной системы невзаимодействующих частиц. М.: МПУ, 1992. ВИНИТИ, №2424-В92, 24 с.

58. Яламов Ю. И., Голов А. Н.. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме. – Труды Центра фундаментальных научных исследований МГОУ, № 1, М., Издательство МГОУ, 2005, С. 15 – 26.
59. Голов А. Н. Учёт начального состояния в нестационарном решении уравнения Лиувилля для свободно расширяющегося газа. М.: МПУ, 1995. ВИНИТИ № 3303-В95, 8 с.
60. Голов А. Н., Зудина М. Н. Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле.// Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 3, 2012, С. 50 – 55.
61. Голов А. Н., Зудина М. Н. Вихревые движения в газоподобных и газодисперсных облаках, движущихся во внешних полях// Материалы XXVI-й Международной научной конференции «Дисперсные системы». Одесса, 2014.
62. Голов А. Н., Зудина М. Н., Перов А. А., Шутов А. И. Кинетическая теория вихревых движений газоподобного облака, движущегося в потенциальном поле с начальной скоростью, ортогональной полю.// Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 2, 2013, С. 11 – 17.
63. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: «Наука», 1979. 280 с.
64. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: «Наука», 1973. 494 с.
65. Голов А. Н. Нахождение полей плотности, образуемых диспергированием протяжённых тел в вакууме. М.: МПУ, 2002. ВИНИТИ № 121- В2002, 7 с.
66. Голов А. Н., Зудина М. Н. Учет начальных условий в задаче о вихрях, создаваемых газоподобным облаком исходящим от сферического источника// Материалы XXVII-й Международной науч. конференции «Дисперсные системы». Одесса, 2016.
67. Кухаренко А. П., Зудина М. Н. Вихревые движения в полуограниченном газоподобном нестационарном облаке. Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 3, 2016. С.111 – 119.

68. Голов А. Н. Эволюция полуограниченного нестационарного плоского газоподобного облака. // Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 2, 2014, С. 69 – 78.
69. Голов А. Н., Филиппова А. П. Получение и исследование формулы плотности потока вещества в нестационарном полуограниченном газоподобном облаке. Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 2, 2015, С. 107 – 119
70. Голов А. Н., Кухаренко А. П. // Кинетика эволюции полуограниченного газоподобного облака. «Естественные и технические науки» №11, 2015г. с. 60 – 70. 12 с.
71. Зудина М. Н. Статистическая теория распределения момента силы в нестационарном газоподобном облаке, находящемся в поле потенциальных сил. // Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», № 3, 2015, С.62 – 68.
72. Зудина М. Н. Статистическая теория распределения момента импульса в нестационарном газоподобном облаке, находящемся в поле потенциальных сил. // Международная научно-практическая конференция «Передовые достижения современных наук. Новые реалии и научные решения». С-Пб. 93с., 2015.
73. Зудина М. Н. Плотность момента силы и момента импульса в нестационарном газоподобном облаке, находящемся в поле потенциальных сил. // Естественные и технические науки, №11, 2015, С.70-74
74. Голов А. Н., Зудина М. Н. Учет начального состояния в задаче об эволюции вихревых образований в нестационарных газоподобных системах // Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологичных технологий». Москва, МГОУ, 2016.
75. Голов А. Н., Кухаренко А. П., Зудина М. Н. Вихревые движения в полуограниченном газоподобном нестационарном облаке. // Материалы XXVII-й Международной науч. конференции «Дисперсные системы». Одесса, 2016.
76. Голов А. Н. Некоторые задачи кинетической теории эволюции газоподобных систем // LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrucken, 2015, 88с.

77. Becu E., Pavlov V. Thermodynamical functions for a gas of point vortices// Comptes Rendus Mecanique , том 336, №7, 2008, PP. 565-571
78. Catling D. C. Planetary Atmospheres// Treatise on Geophysics (Second Edition). Volume 10: Physics of Terrestrial Planets and Moons, 2015, PP. 429-472
79. Liouville J. // J. de Math. 3, 1838. 342c.
80. Edwards R. H., Cheng H. K. // AIAA Journal, 4, 1966. 558 p.
81. Kholpanov L. P., Nekrasova E. I., Nekrasov A. K. Mathematical simulation of the dynamics of a dispersed phase// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, № 1, 2008. 81 p.
82. Sutugin A. G., Grimberg A. N. Bimodal size distribution in high-dispersed aerosols. // J. Aerosol Sci. 1973. V. 6. 295 p.
83. Гайфуллин А.М. К задаче о взаимодействии вихря с плоскостью. МЖГ № 6 • 2013. С. 72-80.
84. Гайфуллин А. М. Вихревые течения. М.: «Наука», 2015. 319с.
85. Волков А.Н., Джонсон Р.Э., Такер О.Дж. Расширение одно- и двухатомного газов от сферического источника в вакуум в гравитационном поле// Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 112-125.
87. Товбин Ю.К. Структура уравнений переноса массы, импульса и энергии в сильнонеравновесных условиях// ЖФХ, 2014, том 88, № 1, С. 1–9
88. Vun S., Naser J., Witt P. J., Yang W. Measurements and numerical predictions of gas vortices formed by single bubble eruptions in the free board of a fluidized bed Chemical Engineering Science 2010. PP. 5808–5820
89. Белоцерковский О. М., Фимин Н. Н., Чечёткин В. М. Статистическая механика вихревых гидродинамических структур. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, С.1559–1565
90. Белоцерковский О. М., Фимин Н. Н., Чечёткин В. М., “К возможности объяснения существования вихреподобных гидродинамических структур на основе теории стационарных кинетических уравнений”, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, С. 960–969

91. Белоцерковский О.М., Гиневский А.С., Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит. 1995. 368с.
92. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби, ДАН. Т. 446. № 6. 2012. С. 15–22.
93. Alam Sarker M.S., Kishore N., Distribution functions in the statistical theory of convective MHD turbulence of an incompressible fluid // Astroph. and Space Sci. V. 181. 1991. PP. 29–42.
94. Santangelo P., Benzi R., Legras B., The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional, decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity // Phys. Fluids A. V. 1. 1989. PP. 1027–1034
95. Meiburg E., Three dimensional vortex dynamics simulations in fluid vortices. Ed. Green S.I. Kluwer Academic Publishers. 1995. PP. 651-685.